

高中三角函数教学中问题解决能力培养的比较研究

芦瑞琦¹, 俞宏毓¹, 马黎月², 瞿思诺³

1. 南京信息工程大学教师教育学院, 南京市, 江苏省, 中国;
2. 南京市启迪小学, 南京市, 江苏省, 中国;
3. 苏州市吴县中学, 南京市, 江苏省, 中国

摘要: 本文以2019年苏教版与人教A版高中数学教材三角函数内容为研究对象, 基于鲍健生综合难度模型, 从探究、背景、运算、推理和知识含量五个维度对例习题进行定量编码与难度分析, 同时结合波利亚问题解决理论, 从“理解问题—拟定方案—执行方案—回顾反思”四阶段切入, 系统探究两版教材在问题解决能力培养上的差异。研究发现, 苏教版例习题总量显著多于人教A版, 其在复杂运算、推理训练及多知识点整合方面要求更高, 更侧重学生综合应用能力的锤炼; 人教A版虽题量较少, 但生活情境占比更高, 更利于夯实学生基础问题解决能力与激发学习兴趣。基于上述差异, 本文提出“教材优势融合+问题链驱动”的培养路径, 构建“基础—综合—应用”三阶训练体系, 为高中三角函数教学优化及学生问题解决能力提升提供实践参考。

关键词: 三角函数; 问题解决能力; 教材比较; 问题链

A Comparative Study on the Cultivation of Problem-Solving Ability in High School Trigonometric Function Teaching

Ruiqi Lu¹, Hongyu Yu¹, Liyue Ma², Sinuo Qu²

1. Nanjing University of Information Science and Technology, Nanjing, Jiangsu, China
2. Nanjing Qidi Primary School, Nanjing, Jiangsu, China
3. Suzhou Wuxian Middle School, Suzhou, Jiangsu, China

Abstract: This paper takes the trigonometric function content in the 2019 Sujiao Edition and People's Education Press A Edition high school mathematics textbooks as the research object. Based on Bao Jiansheng's comprehensive difficulty model, it conducts quantitative coding and difficulty analysis of examples and exercises from five dimensions: inquiry, background, operation, reasoning, and knowledge content. Meanwhile, combined with Polya's problem-solving theory, it systematically explores the differences between the two editions in cultivating problem-solving ability from the four stages of “understanding the problem-formulating a plan-implementing the plan-reviewing and reflecting”. The study reveals that the Sujiao Edition contains significantly more examples and exercises than the People's Education Press A Edition, with higher requirements for complex operations, reasoning training, and integration of multiple knowledge points, focusing more on honing students' comprehensive application abilities. In contrast, although the People's Education Press A Edition has fewer questions, it features a higher proportion of real-life scenarios, which is more conducive to consolidating students' basic problem-solving skills and stimulating their learning interest. Based on these differences, this paper proposes a cultivation path of “integrating textbook advantages + problem chain-driven teaching” and constructs a three-stage training system of “foundation-synthesis-application”, aiming to provide practical references for optimizing high school trigonometric

function teaching and enhancing students' problem-solving abilities.

Keywords: Trigonometric Functions; Problem-Solving Ability; Textbook Comparison; Problem Chain

1 问题提出

1.1 研究背景

21世纪知识经济的蓬勃发展推动经济全球化、科技信息化与文化多元化深度融合，国际竞争核心聚焦于人才质量，问题解决能力作为人才核心素养的关键组成，直接决定个体竞争发展空间，对高中生而言，数学作为自然科学基础，其问题解决能力培养关乎未来社会适应与国际竞争能力。全球教育改革中，美国早将问题解决能力纳入关键技能，PBL模式推动理念落地；国内政策也明确其为数学课程改革核心，是核心素养体系中自主发展维度的重要内容。三角函数作为高中数学核心内容，是连接代数与几何的桥梁，但其教学存在重知识灌输、轻能力培养的问题，而问题解决过程恰是数学思维激活过程，斯腾伯格强调教育应引导思维，三角函数问题解决能推动学生思维跃迁，是提升教学质量的关键。教材作为教学核心纽带，国内外编排存在差异，我国教材侧重知识系统性，国外教材更注重问题的生活化情境创设与知识的综合性应用，通过比较不同教材三角函数内容编排、问题设计及能力培养路径，可为教材优化提供参考，助力问题解决能力培养理念融入教材编写，支撑学生数学核心素养发展。

1.2 研究目的及意义

1.2.1 理论意义

本研究聚焦三角函数领域，系统分析问题解决能力的构成要素与培养路径，填补了数学问题解决能力学科化研究的空白，为数学教育理论体系提供新的实证支撑，丰富了数学问题解决能力培养的学科化研究。当前核心素养与学科教学融合仍在探索，本研究梳理数学课程标准对三角函数教学的要求[1]，构建核心素养与问题解决能力培养的关联框架，丰富了核心素养导向下的数学教学理论，为三角函数教学提供明确理论依据。现有中外数学教材

比较研究多关注知识内容差异，本研究以问题解决能力培养为切入点，对比不同教材在三角函数内容编排、问题设计、教学引导等方面的不同，为教材比较研究提供新视角，推动教材理论研究多元化发展。

1.2.2 实践意义

针对当前高中三角函数教学中教师对问题解决能力培养实施路径不清晰、教学方法单一的问题，本研究分析中外教材的优势与不足，结合教学实践提炼出基于核心素养的问题解决能力培养策略，如情境创设、思维引导、建模训练等，为一线教师提供具体教学参考，助力教师优化教学过程，提升教学质量。通过培养问题解决能力，学生能更深刻理解三角函数本质，掌握数学思维方法，提升数学抽象、逻辑推理、数学建模等核心素养，不仅有助于提高三角函数学习成效，还能为后续数学学习和终身发展奠定基础，实现从“知识学习”到“能力发展”的转变。教材建设对提升教育质量至关重要，本研究比较中外教材在问题解决能力培养方面的特点，总结可借鉴的经验，如强化问题情境真实性、增加探究性问题设计等，为我国高中数学教材的修订与优化提供实践依据，推动教材更好地贴合核心素养培养要求，提升育人价值[2]。

2 研究设计

2.1 研究对象

本文以2019年人民教育出版社出版的《普通数学教科书数学（A版）》[4]和2019年江苏凤凰教育出版社出版的《普通数学教科书数学》[5]作为研究对象，以三角函数为切入口，从习题数量，习题综合难度角度，采用难度综合模型，分析两版教材三角函数的习题难度，对两版教材三角函数。

表1. 两部教材三角函数内容分布情况

| 版本 | 册次 | 章节名称 | 内容安排 |
|------|-------|-------------|-------------------------------------|
| 苏教版 | 必修第一册 | 第七章 三角函数 | 角与弧度 |
| | | | 三角函数概念 |
| | | | 三角函数的图像和性质 |
| | 必修第二册 | 第十章 三角恒等变换 | 三角函数应用 |
| | | | 两角和与差的三角函数 |
| | | | 二倍角的三角函数 |
| 人教A版 | 必修第一册 | 第五章 三角函数 | 几个三角恒等式 |
| | | | 余弦定理 |
| | | | 正弦定理 |
| | 必修第二册 | 第十一章 解三角形 | 余弦定理、正弦定理的应用 |
| | | | 任意角与弧度制 |
| | | | 三角函数的概念 |
| 苏教版 | 必修第一册 | 第七章 三角函数 | 诱导公式 |
| | | | 三角函数的图形与性质 |
| | 必修第二册 | 第十章 三角恒等变换 | 三角恒等变换 |
| | | | 函数 $y = A \sin(\omega x + \varphi)$ |
| 人教A版 | 必修第一册 | 第五章 三角函数 | 三角函数的应用 |
| | | | 三角函数的应用 |
| 苏教版 | 必修第二册 | 第六章 平面向量的应用 | 正弦余弦定理 |
| | | | 正弦余弦定理 |

部分进行定量研究。两部教材三角函数内容的分布情况如表1所示。

由表1可知，两版教材均将三角函数纳入必修课程体系，凸显了三角函数在中学数学课程中的重要地位。人教A版三角函数内容集中编排于必修第一册第五章，仅正余弦定理穿插在必修第二册“平面向量的应用”章节中；苏教版则将三角函数内容较为均匀地分布于两册必修教材中，且将三角恒等变换、解三角形分别作为独立章节编排，体现了对三角函数各模块内容的同等重视。总体而言，两版教材中三角函数内容均占总篇幅的五分之一以上，进一步印证了其在高中数学知识体系中的重要性。

2.2 研究方法

鲍健生教授的综合难度模型[6]由探究、背景、运算、推理和知识含量五个因素组成，统计每个因素上每个水平层次中的习题题量及百分比，根据等级权重，计算习题在每个因素上的加权平均值，具体公式为：

$$d_i = \frac{\sum_j n_{ij} d_{ij}}{n} (\sum_j n_{ij} = n, i = 1, 2, \dots)$$

其中 $d_i (i=1, 2, 3, 4, 5)$ ，分别为“探究”、“背景”、“运算”、“推理”、“综合知识”五个难度因素上的取值； d_{ij} 为第 i 个难度因素的第 j 个水平权

重(以水平分别取1, 2, 3, ...), n_{ij} 则表示这组题目中属于第 i 个难度因素的第 j 个水平的题目的个数，其总和等于该组题目的总数 n ，并根据结果制作雷达图[7]，五个难度因素的水平划分如表2所示：

表2 习题综合难度因素水平划分表

| 难度因素 | 水平 1 | 水平 2 | 水平 3 | 水平 4 |
|------|--------|--------|--------|--------|
| 探究 | 了解 | 理解 | 掌握 | |
| 背景 | 无背景 | 个人生活 | 生活常识 | 科学情境 |
| 运算 | 无运算 | 数值运算 | 简单符号运算 | 复杂符号运算 |
| 推理 | 无推理 | 简单推理 | 复杂推理 | |
| 综合知识 | 1 个知识点 | 2 个知识点 | 3 个及以上 | |

3 研究结果与分析

3.1 总体分析

习题是教材的重要组成部分，是教师教学的重要依据，也是帮助学生掌握知识的重要工具，习题需要将所学知识加以运用，可以进一步深化所学知识，更可以一题多变，达到举一反三的效果，因此，习题设置是否合理，安排是否恰当，难度是否适宜，关乎教材的质量。

苏教版习题分为“感受·理解”、“思考·运用”、“探究·拓展”三个层次。“感受·理解”让学生运用所学知识解决问题，巩固所学知识，加深理解。“思考·运用”对学生提出较高要求，要求学生深入思考，灵活运用所学知识，能够举一反三。“探究·拓展”提出更高要求，题目类型多样，并不局限于传统的题目类型，也有问答题、操作题等开放性题型，旨在鼓励培养学生的探究性和创造性。

人教A版的习题也分三个层次，分别为“复习巩固”、“综合运用”、“拓广探索”，与苏教版思路大体相当。

3.2 例习题数量

为科学合理地分析统计数据，保证研究的客观性，通过统一计数，例习题编码相同，大题均以例1、例2、例3...或1、2、3的形式呈现；小题则以（1）、（2）、（3）...的形式呈现。本研究按小题数量进行量化统计，若小题存在多次提问，均记作一题统计。统计结果在表3。同时，根据表3中数据绘制条形统计图，如图1、2所示[8]：

表3. 两版教科书三角函数例习题数量统计表

| | 苏教版 | | 人教A版 | |
|------|-----|--------|------|--------|
| | 数量 | 百分比 | 数量 | 百分比 |
| 例题 | 64 | 14.51% | 43 | 16.17% |
| 练习 | 138 | 31.29% | 88 | 33.08% |
| 节习题 | 145 | 32.88% | 105 | 39.47% |
| 习题 | | | | |
| 章复习题 | 49 | 11.11% | 30 | 11.28% |
| 本章测试 | 45 | 10.20% | 0 | 0% |
| 合计 | 377 | 85.49% | 223 | 83.83% |
| 总计 | 441 | 100% | 266 | 100% |

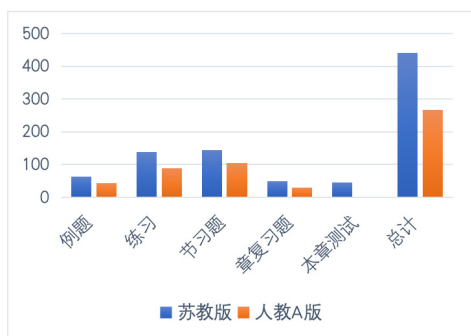


图1. 两版教材三角函数例习题数量的统计图

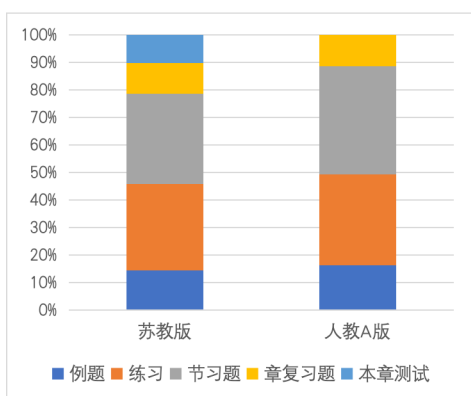


图2. 两版教材三角函数例习题分布比例图

根据图表可以发现，苏教版例习题总量更多，共计441道；人教A版例习题数量较少，仅为266道。苏教版的题量几乎是新人教A版的2倍，说明苏教版更加注重对学生知识的巩固和训练。

具体分析两版教科书例习题所占比例可知，关于“章复习题”占比，苏教版和人教A版无明显差异，章复习题占比分别为11.11%、11.28%，人教A版略高于苏教版。

关于“例题”“练习”设置，两版教科书存在稍许差异。例题占比上，苏教版和人教A版分别为14.51%、16.17%；练习占比上，分别占31.29%、33.08%，人教A版“练习”设置高于苏教版，说明其更侧重利用练习巩固本节所学内容。

“节习题”上两版教材存在显著差异。人教A版节习题设置远高于苏教版，其占比为39.47%，比苏教版高了6.59%。说明人教A版教科书更为注重节习题配置。此外苏教版设置了“本章测试”，占比为10.20%，而人教A版无本章测试。

3.3 例题难度分析

按照鲍建生教授建立的数学题综合难度多因素模型，从五个难度因素出发，分析新苏教版和新人教A版三角函数的例题难度，对两版数学教材三角函数部分的例题进行梳理统计如下表4所示：

表4. 两版教科书三角函数例题难度因素量化指标

| 难度因子 | 水平等级 | 赋值 | 苏教版 | | 人教A版 | |
|------|------------|----|------|--------|------|--------|
| | | | 题量 | 百分比 | 题量 | 百分比 |
| 探究 | 识记 | 1 | 22 | 34.38% | 16 | 37.21% |
| | 理解 | 2 | 33 | 51.56% | 21 | 48.84% |
| | 探究 | 3 | 9 | 14.06% | 6 | 13.95% |
| 加权平均 | | | 1.79 | | 1.77 | |
| 背景 | 无背景 | 1 | 56 | 87.50% | 37 | 86.05% |
| | 个人生活 | 2 | 5 | 7.81% | 4 | 9.30% |
| | 公共常识 | 3 | 1 | 1.56% | 1 | 2.32% |
| | 科学背景 | 4 | 2 | 3.13% | 1 | 2.32% |
| 加权平均 | | | 1.20 | | 1.21 | |
| 运算 | 无运算 | 1 | 7 | 10.93% | 6 | 13.96% |
| | 数值运算 | 2 | 15 | 23.44% | 10 | 23.26% |
| | 简单符号运算 | 3 | 34 | 53.13% | 22 | 51.16% |
| | 复杂符号运算 | 4 | 8 | 12.50% | 5 | 11.63% |
| 加权平均 | | | 2.63 | | 2.67 | |
| 推理 | 无推理 | 1 | 6 | 9.38% | 5 | 11.63% |
| | 简单推理 | 2 | 48 | 75.00% | 33 | 76.74% |
| | 复杂推理 | 3 | 10 | 15.60% | 5 | 11.63% |
| 加权平均 | | | 2.06 | | 2.00 | |
| 知识含量 | 1个知识点 | 1 | 15 | 23.44% | 12 | 27.91% |
| | 2个知识点 | 2 | 29 | 45.31% | 21 | 48.84% |
| | 3个及3个以上知识点 | 3 | 20 | 31.25% | 10 | 23.26% |
| 加权平均 | | | 2.07 | | 1.95 | |

根据表中结果，先对五个难度因素进行各自分析，比较之间的差距，再对两个版本教材例题的综合难度进行一个总体的分析比较。

3.3.1 探究水平

由图3可知，苏教版和人教A版两部教材属于“识记”水平的例题分别占34.38%，37.21%。属于“理解”水平的例题分别占51.56%，48.84%。属于“探究”水平的例题分别占14.06%，13.95%。

苏教版在识记水平明显低于人教A版，低2.83个百分点。而在理解水平明显高于人教A版，高2.72个百分点，体现了人教A版知识点多侧重于识记，而苏教版对知识点要求较高，多侧重于理解。苏教版在探究水平上也略高于人教A版，高0.11个百分点，说明苏教版的整体探究因素的难度比人教A版高，对于知识点的要求要高于人教A版。

3.3.2 背景水平

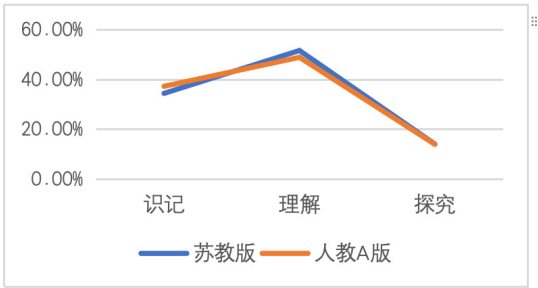


图3. 两版教材例题在探究水平的比重

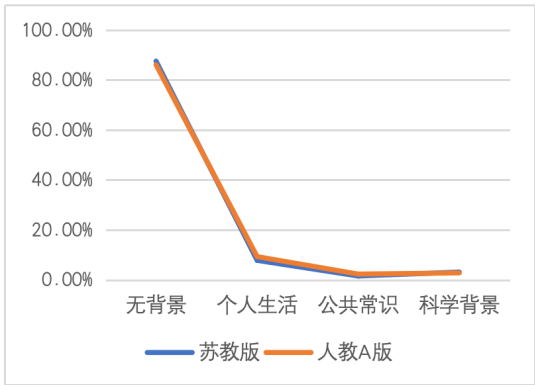


图4. 两版教材例题在背景水平的比重

由图4可知，苏教版和人教A版两部教材属于“无背景”水平的例题分别占87.50%，86.05%。属于“个人生活”水平的例题分别占7.81%，9.30%。属于“公共常识”水平的例题分别占1.56%，2.32%，属于“科学背景”水平的例题分别占3.13%，2.32%。

可以发现，两版教材例题的设置大多都是无背景的，都达到了将近90%的比重，苏教版在无背景水平明显高于人教A版，高1.45个百分点。在个人生活和公共常识水平都低于人教A版，分别低1.49个百分点和0.76个百分点。在科学情境水平上高于人教A版，高0.81个百分点。说明人教A版的更重视教材例题的实际背景，特别是公共常识和个人生活的背景，有利于学生学习数学的积极性，提高学生学习的兴趣。

3.3.3 运算水平

由图5可知，苏教版和人教A版两部教材属于“无运算”水平的例题分别占10.93%，13.96%。属于“数值运算”水平的例题分别占23.44%，23.26%。属于“简单符号运算”水平的例题分别占53.13%，51.16%，属于“复杂符号运算”水平的例题分别占12.50%，11.63%。

可以发现，两版教材例题的设置大多都是简单符号运算，均超过了一半的比重，人教A版在无运算水平明显高于苏教版，高3.03个百分点，“数值运算”“简单符号运算”和“复杂符号运算”这三个水平上苏教版分别比人教A版高0.18个百分点，1.97个百分点和0.87个百分点。

总体而言苏教版对学生运算有更严格要求，人教A版放宽了对学生大量运算的要求，并不只注重培养学生的运算技能，更重视学生对基础概念及其本质的理解。

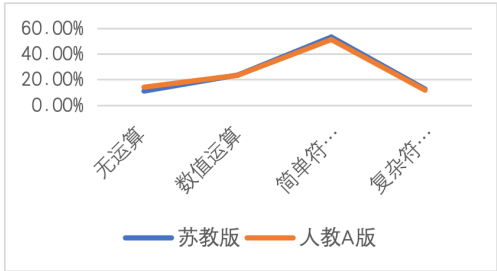


图5. 两版教材例题在运算水平的比重

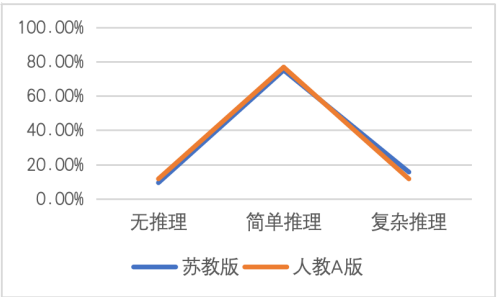


图6. 两版教材例题在推理水平的比重

3.3.4 推理水平

由图6可知，苏教版和人教A版两部教材属于“无推理”水平的例题分别占9.38%，11.63%。属于“简单推理”水平的例题分别占75.00%，76.74%。属于“复杂推理”水平的例题分别占15.60%，11.63%。

可以发现两版教材例题的设置都以简单推理

为主，均超过了一半的比重，苏教版在“无推理”和“简单推理”水平上分别比人教A版低2.25个百分点，1.74个百分点，说明人教A版更加侧重学生对基础知识的理解及应用，苏教版在复杂推理水平上明显高于新人教A版，高3.97个百分点，说明苏教版对学生的推理能力要求较高。

3.3.5 知识含量水平

由图7可知，苏教版和人教A版两部教材属于“一个知识点”水平的例题分别占23.44%，27.91%。属于“2个知识点”水平的例题分别占45.31%，48.84%。属于“3个及3个以上知识点”水平的例题分别占31.25%，23.26%。

可以发现两版教材例题涉及1-2个知识点占了很高的比重，例题的设置是较基础的，都注重对基础知识的训练，并且人教A版在“1个知识点”，“2个知识点”上分别比苏教版高4.47个百分点和3.53个百分点。但苏教版在3个及3个以上知识点水平明显高于人教A版，高了近8个百分点，说明苏教版的例题设置较难，知识点综合应用较多，对学生的要求较高。

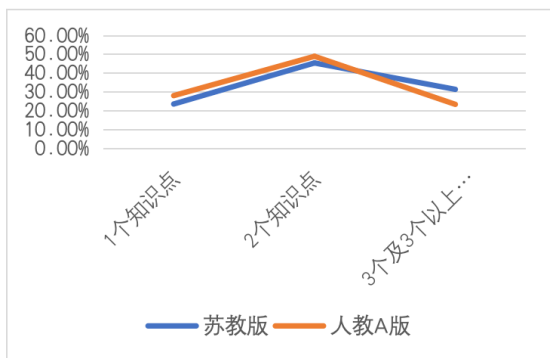


图7. 两版教材例题在知识含量水平的比重

表5. 两版教材三角函数例题综合难度

| 教材 | 探究 | 背景 | 运算 | 推理 | 知识含量 |
|------|------|------|------|------|------|
| 苏教版 | 1.79 | 1.20 | 2.63 | 2.06 | 2.07 |
| 人教A版 | 1.77 | 1.21 | 2.67 | 2.00 | 1.95 |

3.3.6 例题综合难度

根据表4两版教科书例题各难度因素值，计算两版教科书关于五个难度因素的加权平均，如表5所示。

两版教材例题综合难度模型的直观模型如图8，

由图可知苏教版和人教A版例题在五个难度因素上大体相近，差距相差不大，两版教材大部分例题都处在理解水平，无背景，简单符号运算，简单推理，2个知识点水平。水平最高的因素都是运算因素，旨在训练学生的运算能力，苏教版在探究，推理水平上略高于人教A版，在知识点含量上明显高于人教A版，从整体看，苏教版例题难度要比人教A版略高[9]。

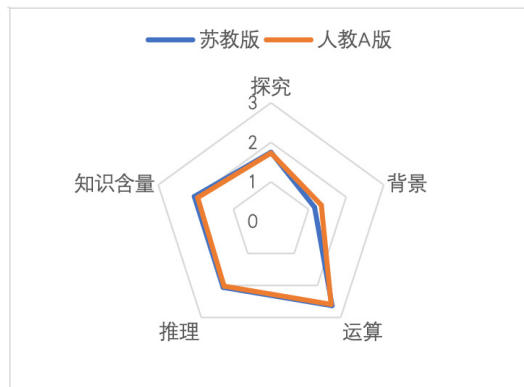


图8. 两版教材三角函数例题难度综合直观模型

4 问题解决能力差异分析

问题解决能力的培养是高中数学教学的核心目标之一，其涵盖理解问题、拟定方案、执行方案、回顾反思四个相互关联的子能力维度。本节基于两版教材三角函数章节的题目设计，从四个子能力维度对比分析其支撑差异，为后续教学策略优化提供实证依据[10]。

1. 理解问题能力：人教A版情境优势更显著

理解问题作为问题解决的起点，其核心在于引导学生实现“现实情境—数学问题”的有效转化，而情境设计是降低转化难度、提升理解效率的关键。对比发现，人教A版在情境化题目设计上优势明显：其生活情境题占比达9.30%，较苏教版高出1.49个百分点，科学情境题占比2.32%，通过贴近学生生活的场景设计，帮助学生快速关联已有经验，精准提取数学信息。

人教A版例题以“城市气温随时间变化”为背景，明确给出最高温、最低温及对应时间，直接呈现“现实现象—数学表达”的转化需求，学生可通过生活认知理解“气温变化的周期性”，进而聚焦“三角函数模型构建”的核心问题；而苏教版例题则以纯数学符号形式呈现，直接给出函数表达式

及图像上的点,要求学生求解参数,未设置任何实际情境支撑,需学生具备较强的符号解读能力和抽象思维,对问题的理解门槛更高。这种差异表明,人教A版更注重通过情境铺垫降低问题理解难度,而苏教版更侧重对数学符号本身的直接考查。

2.拟定方案能力:苏教版知识整合要求更高

拟定方案能力体现学生对知识的关联与运用能力,其核心在于根据问题特征,精准调用多个模块的知识构建解题路径。统计数据显示,苏教版对知识整合的要求显著高于人教A版:苏教版包含3个及以上知识点的综合性题目占比为31.25%,较人教A版高出8个百分点,这类题目需要学生打破知识模块的界限,实现多知识点的有机融合。

苏教版习题以“三角形边角比例关系”为切入点,要求学生先通过正弦定理将角的比例转化为边的比例,再借助余弦定理计算指定角的余弦值,最后结合三角形性质判断形状,解题过程需串联“正弦定理—余弦定理—三角形形状判定”三个核心知识点,着重训练学生的知识整合与方案设计能力;而人教A版习题直接给出三角形的两边及夹角,仅需调用余弦定理单一知识点即可求解,解题方案相对固定,对知识整合的要求较低。由此可见,苏教版更侧重通过综合性题目培养学生的方案拟定能力,而人教A版更注重单一知识点的直接应用。

3.执行方案能力:苏教版运算推理更复杂

执行方案能力是问题解决的核心实践环节,其水平体现在运算的准确性、推理的严谨性及步骤的完整性上。对比两版教材题目设置发现,苏教版在复杂运算与推理训练上更具优势:苏教版复杂符号运算题占比12.50%,较人教A版高出0.87个百分点;复杂推理题占比15.60%,较人教A版高出3.97个百分点,且对解题步骤的完整性要求更高。

苏教版例题要求先对三角函数表达式进行化简,需先后运用两角差正弦公式、正弦差角公式两步变形,再代入具体角度进行数值计算,整个过程步骤繁琐,对运算准确性和推理严谨性的要求较高;而人教A版例题可直接运用二倍角公式将表达式简化,一步即可完成计算,执行步骤简洁,运算与推理难度较低。这种差异表明,苏教版更注重通过复杂题目锤炼学生的执行方案能力,而人教A版更侧重基础运算与推理能力的巩固。

4.回顾反思能力:两版均需强化,苏教版略有优势

回顾反思能力是问题解决的升华环节,其核心在于通过对解题过程的复盘,总结规律、提炼方法,实现知识的迁移与应用。两版教材在该维度的支撑均存在不足:含“反思拓展”要求的题目占比均不足10%,难以充分引导学生开展深度反思。但相比之下,苏教版略具优势。

苏教版在“本章测试”中设置了变式探究题,如“若改变摩天轮转速,模型参数如何调整”,这类题目未局限于单一答案的求解,而是引导学生思考“参数变化与实际情境的关联”,促使学生总结解题规律,拓展反思维度;而人教A版的题目多为“单一答案”类题目,缺乏变式设计,学生解题后无需进行深度思考即可完成任务,反思空间较窄,难以实现解题经验的迁移与升华。因此,两版教材均需加强反思类题目的设计,其中人教A版需进一步增加变式题目,拓宽学生的反思维度。

5 问题解决能力培养的教学策略

5.1 教材优势融合:构建“三阶段四维度”训练路径

立足人教A版的情境优势与苏教版的综合优势,设计“基础—综合—应用”三阶教学路径,全面覆盖波利亚问题解决“理解问题、拟定方案、执行方案、回顾反思”四阶段,实现能力的循序渐进培养。

基础阶段以人教A版资源为核心,聚焦“理解问题”与“拟定方案”基础能力的培养:选取“商场扶梯倾斜角计算”“小区停车位遮阳棚角度设计”等生活情境题,引导学生提取数学信息,掌握“现实情境—数学问题”的转化方法;通过教材“节习题”强化单一知识点的应用训练,帮助学生形成“根据问题选方法”的基础方案拟定能力[11]。

综合阶段以苏教版资源为依托,侧重“执行方案”与“回顾反思”能力的提升:利用“三角函数图像性质+解三角形”“三角恒等变换+函数单调性”等多知识点融合题,训练学生复杂运算与推理能力,提升执行方案的准确性;借助“探究·拓展”栏目题目,引导学生验证解题方法的合理性、分析模型的适用范围,培养反思意识。

应用阶段融合两版教材优势，聚焦能力的综合迁移：设计“用三角函数分析音乐波形周期性”“结合天文学数据预测日出日落时间”等跨学科项目，让学生在完整的探究过程中，系统运用四阶段能力，实现从知识应用到能力迁移的跨越。

5.2 问题链驱动：打造能力培养“脚手架”

参考立体几何问题链设计逻辑，围绕三角函数核心知识点，构建“情境感知—模型构建—方案优化”递进式问题链，为学生问题解决能力培养搭建“脚手架”，规避传统教学“跳过问题表征直接解题”的弊端，引导学生逐步掌握完整解题流程。

以“简谐运动”知识点为例，设计四级问题链：①理解问题层面：“简谐运动中物体位移随时间变化的规律是什么？请用文字、图像两种形式描述。”引导学生感知情境，明确问题核心；②拟定方案层面：“已知简谐运动周期2秒、振幅5厘米， $t=0$ 时位移-5厘米，如何确定 $y=A \sin(\omega x + \phi)$ 的参数？请列出解题思路。”训练学生知识调用与方案设计能力；③执行方案层面：“计算 $t=0.5$ 秒时的位移，写出完整步骤并检查运算准确性。”强化运算与推理的严谨性；④回顾反思层面：“若位移最大值变为8厘米且周期不变，参数需如何调整？总结参数与运动特征的关联规律。”引导学生提炼方法，实现知识迁移[12]。

6 教材编写建议

6.1 科学合理设置例题

例题是围绕知识点，进一步巩固和深化知识点的重要途径，也是教师课堂教学的重要素材与手段，例题数量也要合理，要体现少而精的原则，避免陷入题海战术，因此，例题的设置要体现巩固性，科学性的原则，落实数学课程目标，多方面培养学生的数学核心素养。

6.2 例题选材丰富，力求贴近生活

要力争贴近学生的现实生活，可以跨学科，充分体现数学来源于生活服务于生活，有利于培养学生的兴趣，提高学生学习的主动性，培养学生数学应用意识。

6.3 例题体现循序渐进的原则

例题的设置要突出层次性，难度要由一定的梯度，由易到难，由简入繁，层层递进，注重知识点间的联系，而且例题难度要适中，在学生最近发展区内，从而有效培养学生数学核心素养[9]。

7 不足与展望

本研究以苏教版与人教A版高中数学教材三角函数内容为研究对象，构建了基于鲍健生综合难度模型与波利亚问题解决理论的比较框架，从多个维度开展了定量与定性分析，具有一定的独创性，但仍存在以下局限：

第一，研究对象覆盖范围较窄，仅选取两版教材进行比较，未能纳入其他版本教材（如北师大版、湘教版等），研究结论的普适性有待进一步验证。

第二，研究内容聚焦于三角函数章节，未对整套教材进行系统分析，所得结论仅适用于三角函数部分，难以代表两版教材的整体特征，关于结论能否推广至其他章节仍需深入研究。

第三，研究方法以静态文本分析为主，未涉及教材实际使用过程中的动态因素（如教师教学方式、学生学习反馈等），所得结论未能充分反映教材在教学实践中的应用效果。

基于上述不足，未来研究可从以下方面展开：

扩大研究对象范围，增加其他版本高中数学教材，丰富研究样本，提升结论的普适性。

拓展研究内容，选取不同版本教材中的多个章节进行比较分析，或对整套教材开展系统性研究，使结论更具代表性。

结合文本分析与实证调研，通过课堂观察、教师访谈、学生测试等方式，探究教材在实际教学中的应用效果，实现静态分析与动态研究的有机结合，让研究结论更具科学性与实践价值。

致谢

基金项目：1.2025年江苏省研究生科研与实践创新计划项目，课题题目：基于问题解决能力培养的高中数学教学研究（课题编号SJCX25_0470）；2.中国科协研究生科普能力提升项目资助（KXYJS2024019）。

参考文献

- [1] 教育部. 基础教育课程改革纲要(试行)[Z]. 北京:中华人民共和国教育部, 2001.
- [2] 章建跃. 核心素养导向的高中数学教材变革——《普通高中教科书·数学(人教A版)》的研究与编写[J]. 中学数学教学参考, 2019(16): 6-10.
- [3] 中华人民共和国教育部. 普通高中数学课程标准(2017年版)[M]. 北京:人民教育出版社, 2018:1.
- [4] 人民教育出版社, 课程教材研究所, 中学数学课程教材研究开发中心. 普通高中课程 标准试验教科书. 数学[M]. 北京:人民教育出版社, 2019.
- [5] 苏教版高中数学教材编写组. 普通高中课程标准试验教科书. 数学[M]. 江苏凤凰教育出版社, 2019.
- [6] 鲍建生. 中英两国初中数学期望课程综合难度的比较[J]. 全球教育展望, 2002, 31(09): 48-52.
- [7] 郭民, 史宁中. 中英两国高中数学教材函数部分课程难度比较研究[J]. 外国中小学教育, 2013(07): 55-59.
- [8] 宋丹丹, 曹一鸣. 高中三角函数内容的国际比较——基于12个国家高中数学课程标准的研究[J]. 中学数学教学参考, 2017(Z1): 131-133.
- [9] 付钰, 张景斌. 中美数学教材三角函数内容的比较研究[J]. 数学通讯, 2018(24): 1-5.
- [10] 张维忠. 问题解决及其对数学教育的影响[J]. 课程.教材.教法, 1994(04): 37-41.
- [11] 唐恒钧, 徐元根, 张维忠. 基于问题链的中学数学有效教学研究——一项课例研究的启示[J]. 数学教育学报, 2018, 27(03): 30-34+44.
- [12] 唐恒钧, 张维忠, 陈碧芬. 基于深度理解的问题链教学[J]. 教育发展研究, 2020, 40(04): 53-57.

