n维欧式空间R^n中的直线、射线与线段的方程及开集中的线段的方程

梁自温

洞口县竹市中心卫生院，邵阳市，湖南省，中国

摘要：由于相关文献对n维欧式空间中的直线、射线与线段的方程及开集中的线段的方程涉及较少，本文给出了这些方程的多种形式。首先证明了相关引理，如过n维空间中两点的直线的几何点与n维点的对应关系、直线点集与数轴点集的等势关系等。接着通过定理和推论详细阐述了直线、射线、线段方程的多种表达形式，并给出证明。例如，过两点的直线方程可表示为特定向量形式，射线方程根据端点和方向不同有多种形式，线段方程也有相应的表达式。文中还通过具体例题展示了如何应用这些方程求解。本文仅运用一次函数性质及等势等基础知识完成证明，为相关领域的研究提供了理论支持。

关键词：n维欧式空间；直线方程；射线方程；线段方程；等势

Equations of Lines, Rays, and Line Segments in n-Dimensional Euclidean Space R^n and Equations of Line Segments in Open Sets

Ziwen Liang

Dongkou County Zhushi Central Health Center, Shaoyang City, Hunan Province, China

Abstract: Since there is relatively little literature on the equations of lines, rays, and line segments in n-dimensional Euclidean space and the equations of line segments in open sets, this paper presents several forms of these equations. Firstly, relevant lemmas are proven, such as the correspondence between the geometric points of a line passing through two points in n-dimensional space and n-dimensional points, and the equipotential relationship between the point set of a line and the point set of a number axis. Subsequently, through theorems and corollaries, various expressions of the equations of lines, rays, and line segments are elaborated in detail and proven. For example, the equation of a line passing through two points can be expressed in a specific vector form, the equation of a ray has multiple forms depending on the endpoint and direction, and the equation of a line segment also has corresponding expressions. Specific examples are provided in the paper to illustrate how to apply these equations for solving problems. This paper completes the proofs using only basic knowledge such as the properties of linear functions and equipotentiality, providing theoretical support for research in related fields.

Keywords: n-Dimensional Euclidean Space; Equation of a Line; Equation of A Ray; Equation of a Line Segment; Equipotential

由于相关文献很少涉及文题中的那些问题，如只有文献[1,2]才见到，文献[1]的第 12 面上有“设Ω为 R^m 中的开集，若对Ω内的任意两点 x，y 存在有限个点 $x = x_0, x_1, x_2, \cdots x_l = y$，使得每一 $\overline{x_{i-1}x_i} =$

$\left\{Z\middle|Z=tx_{i-1}+(1-t)x_i,0\le t\le 1\right\}\subset\Omega(i=1,2,\cdots l)$，则称 Ω 是连通（折线连通）开集，又称 Ω 为开区域”。另外，第 68 面上有“设 $l=(\cos\theta_1,\cos\theta_2,\cdots\cos\theta_n)$ 是 R^m 中的一个单位向量，在 R^m 中过 x_0 点以 l 为方向向量的直线 L 的方程是 $x=x_0+tl$”，很明显，在开区域的定义中必须指出 $m>1$ 及线段 $\overline{x_{i-1}x_i}$ 构成折线才行，同时必须证明 $\overline{x_{i-1}x_i}=\left\{Z\middle|Z=tx_{i-1}+(1-t)x_i,0\le t\le 1\right\}\subset\Omega$。同样，上面关于直线 L 的方程是 $x=x_0+tl$ 也应证明出来，否则读者是难以接受的。另外，文献[2]的第 351 面上有“给定一点 $x_0\in D$ 和一个方向 u，通过点 x_0 与 x_0+u 的直线称为过点 x_0，且有方向 u 的直线即点集 $\left\{x:\ x=x_0+tu,t\in R\right\}$ 组成这条直线”。

本人认为如果不失作者原意的话，应在“x_0+u”前加“点”字，即“通过点 x_0 与点 x_0+u 的直线…”，即使这样，后面的语义也欠明，有所令人费解。基于以上原因，特写本文，特别一提的是仅应用一次函数性质及等势等十分简单的基础知识便十分轻松地证明了上面的所有问题。下面先证一条引理，并需指出文中所涉及的平面直角坐标系的平面不一定是水平面，另外符号 A~B 表集合 A 与集合 B 等势。

引理 1. 过 n 维空间 R^n 中两点 x_1与x_2 的直线 L 的每个几何点均代表一个 n 维点，且只代表一个 n 维点。

证 若 n=1，命题成立。$n=k\ge 2$ 时命题成立，则过 k 维空间 R^k 中两点 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,k})$ 与 $x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,k})$ 的直线 L_k 的每个几何点均代表唯一 k 维点 $x_k=(x_1',x_2',\cdots x_k')$。当设 $x_{k+1}'\in R$时，$x_{k+1}'\in R$时，则$x_{k+1}=(x_1',x_2',\cdots x_k',x_{k+1}')$为$\mathrm{k}+1$ 维点。若再设集合 A_k={x_k|x_k∈R^k, R^k 表 k 维空间}及集合 $A_{k+1}=\left\{x_{k+1}\middle|x_{k+1}\in R^{k+1},R^{k+1}\text{表}k+1\text{维空间}\right\}$，则得 $A_k\sim A_{k+1}$，即集合 A_k与A_{k+1} 等势。若再设过 k+1 维空间 R^{k+1}中两点$x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,k+1})$ 与 $x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,k+1})$ 的直线为 L_{k+1}，则据直线 L_k 的几何点与直线 L_{k+1} 的几何点一一对应和直线 L_{k+1}的位置及 n 维空间中点的位置是确定的即知本引理成立。

引理 2. 设 A 为数轴上的点的集合，B 为过 n 元空间 R^n 中两点的直线的点的集合。则 A~B 即 A 与 B 等势。

证 若 n=1，命题自然成立。假设 $n=k\ge 2$ 时命题成立，则设 A_k为过k 元空间中两点的直线上的点 $x=(x_{i,1},x_{i,2},\cdots x_{i,k})$ 的集合时，便得 $A_k\sim A$，这里 $i\in N$.

又若设 A_{k+1}为过$k+1$ 元空间中两点的直线上的点 $x=(x_{i,1},x_{i,2},\cdots x_{i,k},x_{i,k+1},)$ 的集合时，便得 $A_{k+1}\sim A_k$，由于 $A_k\sim A$，那么即得 $A_{k+1}\sim A$，于是引理证毕。

引理 3 若过 n 维空间 R^n 中两点 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 的直线 L 为有向直线，自然数 $n>1$，又若 $\sum_{i=1}^{n}x_{2,i}>\sum_{i=1}^{n}x_{1,i}$，则点 x_2 在点 x_1 之上方；若 $\sum_{i=1}^{n}x_{2,i}<\sum_{i=1}^{n}x_{1,i}$，则点 x_2 在点 x_1 之下方。

证 可假设 $x_1\ne(0,0,\cdots,0)$，即 x_1 不是零向量。（若 $x_1=(0,0,\cdots,0)$，则$x_2\ne(0,0,\cdots,0)$,对此仍可同样证明）

现设集合 A={过 n 维空间 R^n 中两点 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 的直线 L 的点}，集合 B={平面直角坐标系 xoy 的 y 轴的点 $|y$ 轴与直线 L 重合}，集合 C= $\left\{x\middle|x\in R^n,R^n\right.$ 表 n 维空间，$x=(x_1',x_2',\cdots x_n')$，当$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$x_{1,i}\ne 0$ 及 t 取遍全体实数时，$x_i'=x_{1,i}t+x_{2,i}$;当$i\in\{1,2,\cdots,n\},x_{1,i}=0$时，$x_i'=x_{2,i}$ },集合 $D=\{\sum_{i=1}^{n}x_i'|$当$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$x_{1,i}\ne 0$ 及 t 取遍全体实数时，$x_i'=x_{1,i}t+x_{2,i}$;当$i\in\{1,2,\cdots,n\}$，$x_{1,i}=0$时，$x_i'=x_{2,i}$ }，集合 $E=\{y|y=x_{1,i}t+x_{2,i}|$ $|i\in\{1,2,\cdots,n\},x_{1,i}\ne 0$ 及 t 取遍全体实数，$y\in B\}$。那么据直线 L 的几何点与 y 轴的几何点一一对应即得 $A\sim B$，于是即得 $A\sim B\sim C\sim D\sim E$。由于$\sum_{i=1}^{n}x_{1.i}$，$\sum_{i=1}^{n}x_{2.i}\in D$，又由于直线 L 的位置与 n 维空间 R^n 中点的位置时确定的，那么本引理得证。

定理 1. 若 x_1,x_2 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，$x_2\ne(0,0,\cdots 0)$ 即 x_2 不是零向量，又若过两点

x_1, x_2 的直线的点集为 A，则 $A=\{x|x=x_1+tx_2, t\text{取遍全体实数}\}$；反之，一切形如 x_1+tx_2(t取遍全体实数)的点都在 A 中。

证 只证定理的上半部分，因下半部分可仿此证明。

$\because x_1, x_2 \in R^n$，则可设 $x_1=(x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots x_{1,n})$，$x_2=(x_{2,1}, x_{2,2}, \cdots x_{2,n})$，由于 $x_2 \neq (0,0,\cdots 0)$，则其内积 $\langle x_2, x_2\rangle=\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}^2>0$。若以过两点 x_1, x_2 的直线 L 作平面直角坐标系 xoy 的 y 轴，则 $y=\langle x_2, x_2\rangle t+\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$ 为一次函数,这里 t 取遍全体实数。又若设集合 $B=\{y\text{轴上的点}\}$，集合 $C=\{\langle x_2, x_2\rangle t+\sum_{j=1}^{n} x_{1,j} | t\text{取遍全体实数}\}$，则 B~C 即集合 B 与集合 C 等势。若再设集合 $D=\{\text{直线}L\text{上的点}\}$，则据引理得 B~D, 那么 B~C~D。

又若设集合 $E=\{(\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{1,j} | t\text{取遍全体实数}\}$，则得 C~E,那么 B~C~D~E。由于 $t \in R$,则$x_1+tx_2=(x_{1,1}+tx_{2,1}, x_{1,2}+tx_{2,2}, \cdots x_{1,n}+tx_{2,n})$ 那么$x_{1,1}+tx_{2,1}$，$x_{1,2}+tx_{2,2}, \cdots x_{1,n}+tx_{2,n}$即为点 x_1+tx_2 的分向量。

又由于$(\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}=(x_{1,1}+tx_{2,1})+(x_{1,2}+tx_{2,2})+\cdots+(x_{1,n}+tx_{2,n})$,那么当设集合 $F=\{x_1+tx_2 | t\text{取遍全体实数}\}$ 时，便得 E~F, 那么 B~C~D~E~F。由于直线 L 上的点即为 n 维点,又由于 n 维空间 R^n 中的点的位置是确定的，那么 A=$\{x|x=x_1+tx_2, t\text{取遍全体实数}\}$。

推论 1. 过 n 为维欧式空间 R^n 中的两点 $x_1, x_2(x_2 \neq (0,0,\cdots 0))$的直线方程为$x=x_1+tx_2$，则其中$t$取遍全体实数。

证 据空间直线方程定义即可证明。

推论 2. 过 n 为维欧式空间 R^n 中的两点 x_1, x_2 (x_2的分向量均不为零) 的直线方程为 $x=x_1+tx_2$，其中t取遍全体实数。

证法一. 据定理 1 即得证明。

证法二. 当设 x 为过 n 维欧式空间 R^n 中两点 x_1, x_2(x_2 的分向量均不为零)的直线上的点时，则 $x=x_1+tx_2$ 为向量方程，于是据 x_2 的分向量均不为零与一次函数性质及向量方程解的意义即得证明。

推论3. 若 $l=(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n)$ 为 n 维空间 R^n 中的一个单位向量，点 $x_0 \in R^n$，

$x_0 \neq (\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n)$，则过点 x_0 且与单位向量 l 平行的直线 L 的方程为 $x=x_0+tl$，其中 t 取遍全体实数。

证 设 n 维点 $x_1=(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n)$，由于 $l=(\cos\theta_1, \cos\theta_2, \cdots, \cos\theta_n)$ 维单位向量，那么过两点 x_0与x_1 的有向直线 L 与单位向量 l 平行。由于 $x_1 \neq \{0,0,\cdots,0\}$，那么据定理 1 得过两点 x_0与x_1 的直线 L 的方程为 $x=x_0+tx_1=x_0+tl$，其中 t 取遍全体实数。于是本推论得证。

推论 4 过 n 维空间 R^n 中两点 x_1与x_2 的直线的点集为开集。

证 据开集定义即可证明。

定理 2 若 x_1, x_2 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点, x_2 的分向量和不为零，t 取遍全体实数，又若设 A 为过两点 x_1, x_2 的直线的点集，则 $A=\{x|x=x_1+tx_2$, x_2 的分向量和不为零，t 取遍全体实数$\}$；反之，一切形如 x_1+tx_2 的点都在 A 中。

证 只证定理的下半部分，因上半部分可仿此证明。

$\because x_1, x_2 \in R^n$，则可设 $x_1=(x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots x_{1,n})$，$x_2=(x_{2,1}, x_{2,2}, \cdots x_{2,n})$，那么据 x_2 的分向量和不为零即得 $\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} \neq 0$，若以过两点 x_1, x_2 的直线 L 作平面直角坐标系 xoy 的 y 轴，则 $y=(\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$ 是一次函数。若设集合 $B=\{(\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{1,j} | t\text{取遍全体实数}\}$，集合 $C=\{y\text{轴上的点}\}$，则 B~C。又若设集合 $D=\{\text{直线}L\text{上的点}\}$，则据引理得 C~D, 那么 B~C~D。

由于$t \in R$,则$x_1+tx_2=(x_{1,1}+tx_{2,1}, x_{1,2}+tx_{2,2}, \cdots x_{1,n}+tx_{2,n})$,那么$x_{1,1}+tx_{2,1}, x_{1,2}+tx_{2,2}, \cdots x_{1,n}+tx_{2,n}$ 即为点x_1+tx_2的分向量。由于$(\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}=(x_{1,1}+tx_{2,1})+(x_{1,2}+tx_{2,2})+\cdots+(x_{1,n}+tx_{2,n})$,

那么当设集合 $E=\{x_1+tx_2|t取遍全体实数\}$ 时，则 B~E,即得 B~C~D~E。由于直线 L 上的点即为 n 维点及 n 维空间中的点的位置是确定的，又由于 A 为过两点 x_1,x_2 的直线的点集，则一切形如 x_1+tx_2 的点都在 A 中。

推论 过 n 为维欧式空间 R^n 中的两点 $x_1,x_2(x_2的分向量和不为零)$ 的直线方程为 $x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍全体实数。

证 据空间直线方程的定义即可证明。

注意：这里的定理 2 实可作为定理 1 之推论，意在印证其定理描述是正确的。

定理 3. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为 n 为维欧式空间 R^n 中的两点

$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$，$t$取遍全体实数，又若设过两点 x_1,x_2的直线的点集为A，则 $A=\{x|x=tx_1+(1-t)x_2\}$；反之，一切形如 $tx_1+(1-t)x_2$ 的点都在 A 中。

证 只证定理的上半部分，因下半部分可仿此证明。

若以过两点 x_1,x_2 的直线 L 作平面直角坐标系 xoy 的 y 轴，则据 $\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 可知 $y=(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 是一次函数。若设集合 $B=\{(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}\mid t取遍全体实数\}$，集合 $C=\{y轴上的点\}$，则 B~C。又若设集合 $D=\{直线L上的点\}$，则据引理即得 C~D,那么 B~C~D。

$\because x_1,x_2\in R^n$，那么 $t\in R$ 时又得 $tx_1+(1-t)x_2=t(x_1-x_2)+x_2=(t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1},\ \ t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}$ 即为点$tx_1+(1-t)x_2$的分向量，由于 $(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}=[t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}]+[t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2}]+\cdots+[t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}]$，那么当设集合 $E=\{tx_1+(1-t)x_2|t取遍全体实数\}$时，便得 B~E，那么 B~C~D~E。由于直线 L 上的点即为 n 维点，又由于 n 维欧式空间 R^n 中的点的位置是确定的,那么 $A=\{x\mid x=tx_1+(1-t)x_2\}$。

推论 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为 n 为维欧式空间 R^n 中的两点，$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$，则过两点 x_1，x_2 的直线方程为 $x=tx_1+(1-t)x_2$，其中 t 取遍全体实数。

证 据空间直线方程定义即可证明。

定理 4. 若 $x_1=(x_{1,1},\ x_{1,2},\ \ldots\ x_{1,n})$ 与 $x_2=(x_{2,1},\ x_{2,2},\ \ldots\ x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，自然数 n>1，$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}=\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$，$t$取遍全体实数，又若设过两点 x_1，x_2 的直线的点集为 A，则 $A=\{x|x=tx_1+(1-t)x_2\}$；反之，一切形如 $tx_1+(1-t)x_2$ 的点都在 A 中。

证 只证定理的上半部分。

若过两点 x_1,x_2 的直线 L 作平面直角坐标系 xoy 的 y 轴，那么若设直线 L 的点集为 B，平面直角坐标系 xoy 的 y 轴的点集为 C，则 B~C。因为 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与 $x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 是 n 维欧式空间 R^n 中不同的两点，自然数 n>1，又$\because\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}=\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$,那么至少存在一个$j\in\{1,2,\cdots n\}$使$x_{1,\ j}\neq x_{2,j}$,不仿设这个$j$为$j'$,则 $x_{1,j'}\neq x_{2,j'}$，那么$y=(x_{1,j'}-x_{2,j'})t+[t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}]+[t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2}]+\cdots+[t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}]$ 是一次函数。若设集合 $D=\{(x_{1,j'}-x_{2,j'})t+[t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}]+[t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2}]+\cdots+[t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}]|t取遍全体实数\}$ 及集合 E = $\{x|x=[t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}]+[t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2}]+\ldots+[t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}],\ t$ 取遍全体实数$\}$，则得 C~D~E,那么 B~C~D~E。由于 $x_1,x_2\in R^n$，那么$t\in R$时得$tx_1+(1-t)x_2=t(x_1-x_2)+x_2=(t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1},\ \ t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2},\cdots,t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}$即为点$tx_1+(1-t)x_2$ 的分向量，于是若设集合 $F=\{tx_1+(1-t)x_2|t取遍全体实数\}$，则得 B~C~D~E~F。由于直线 L 上的点即为 n 维点，又由于 n 维欧式空间 R^n 中的点的位置是确定的，那么据 A 为过两点 x_1,x_2 的直线的点集得 $A=\{x|x=tx_1+(1-t)x_2\}$，证毕。

推论 1. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，自然数 n>1，$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}=\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$，$t$ 取遍全体实数，则过两点 x_1,x_2 的直线方程为 $x=tx_1+(1-t)x_2$，

其中 t 取遍全体实数。

证 据空间直线方程的定义即可证明。

推论 2. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，自然数 n>1,则过两点 x_1,x_2 的直线方程为 $x=tx_1+(1-t)x_2$，其中 t 取遍全体实数。

证 据定理 3 之推论即得证明。

定理 5. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}\neq 0$，那么当$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>0$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为 A_1，则

$A_1=\{x|x=x_1+tx_2,t取遍(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}}]\}$

(或$A_1=\{x|x=x_1+tx_2,\ t取遍[0,+\infty)\}$)；反之，一切形如 $x_1+tx_2(t取遍(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}}]$ (或$x_1+tx_2(t取遍[0,+\infty)))$)的点都在$A_1$中。当$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>0$，且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为$A_2$，

则$A_2=\{x|x=x_1+tx_2,t取遍[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}},+\infty)\}$

(或$A_2=\{x|x=x_1+tx_2,\ t取遍(-\infty,0]\}$)；反之，一切形如 $x_1+tx_2(t取遍[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}},+\infty)$ (或$x_1+tx_2(t取遍[-\infty,0)))$)的点都在$A_2$中。当$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<0$，且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为$A_3$，

则$A_3=\{x|x=x_1+tx_2,t取遍[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}},+\infty)\}$

(或$A_3=\{x|x=x_1+tx_2,\ t取遍(-\infty,0]\}$)；反之,一切形如 $x_1+tx_2(t取遍[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}},+\infty))$ (或$x_1+tx_2(t取遍(-\infty,0]))$)的点都在$A_3$中。当$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<0$，且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为$A_4$，

则$A_4=\{x|x=x_1+tx_2,t取遍(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}}]\}$，

(或$A_4=\{x|x=x_1+tx_2,\ t取遍[0,+\infty)\}$)；反之，一切形如 $x_1+tx_2(t取遍(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}}))$ (或$x_1+tx_2(t取遍[0,+\infty)))$)的点都在$A_4$中。

证，只证定理的第一部分。

若以过两点x_1,x_2的直线L作平面直角坐标系xoy的y轴，则据$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}\neq 0$可知 $y=(\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$ 是一次函数，这里 t 取遍全体实数。若设直线 L 上的点的集合为 B，集合 $C=\{\sum_{j=1}^{n}x_{i,j}|a=(x_{i,1},x_{i,2},\cdots,x_{i,n}),i\in N,a\in B\}$，则 B~C，又若设 y 轴上的点的集合为 D，则据引理得 B~D,那么 B~C~D。若直线 L 上的点 x_1与x_2 分别与 y 轴上的点 x_1',x_2' 对应，则由上可知，点x_1'与实数$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$对应，点x_2'与实数$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$对应，那么点 x_1 与点 x_1'重合，点x_2与点x_2'重合。

很显然，一定存在实数 a_1 使

$$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}=(\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})a_1+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j} \tag{1}$$

也一定存在实数 a_2 使

$$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}=(\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})a_2+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j} \tag{2}$$

由于$x_1,x_2\in R^n$，$t\in R$,那么$x_1+tx_2=(x_{1,1}+tx_{2,1},x_{1,2}+tx_{2,2},\cdots x_{1,n}+tx_{2,n})$ 那么 $x_{1,1}+tx_{2,1}$，$x_{1,2}+tx_{2,2},\cdots x_{1,n}+tx_{2,n}$即为点$x_1+tx_2$的分向量。由于$(\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}=(x_{1,1}+tx_{2,1})+(x_{1,2}+tx_{2,2})+\cdots+(x_{1,n}+tx_{2,n})$，那么当设集合$E=\{x_1+tx_2\mid t取遍全体实数\}$及集合$F=\{(\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\mid t取遍全体实数\}$时，

则得$E \sim F$,那么据$D \sim F$得，B~C~D~E~F, 那么当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > 0$，且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时，据（2）（或（1））式，及直线 L 上的点皆为 n 维点与 n 维欧式空间 R^n 中的点的位置是确定的可得 $A_1 = \{x|x = x_1 + tx_2, t$取遍$(-\infty, \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}]$

(或$A_1 = \{x|x = x_1 + tx_2, t$取遍$[0, +\infty)\}$)，证毕。

推论 1. 若 $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots x_{1,n})$ 与$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \cdots x_{2,n})$ 为 n 为维欧式空间 R^n 中的两点，$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} \neq 0$,那么$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > 0$ 且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时过两点$x_1, x_2$且且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线方程为 $x = x_1 + tx_2$，其中t取遍$(-\infty, \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}]$(或$x = x_1 + tx_2$，取遍 $[0,+\infty)$)；当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > 0$且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时过两点$x_1, x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线方程为 $x = x_1 + tx_2, t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}, +\infty)$(或$x = x_1 + tx_2$，$t$取遍$(-\infty, 0]$)；当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < 0$且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时过两点$x_1, x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线方程为 $x = x_1 + tx_2$，t 取遍 $[\frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}, +\infty)$

(或$x = x_1 + tx_2, t$取遍$(-\infty, 0]$)；当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < 0$且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时过两点$x_1, x_2$，且以$x_2$或($x_1$)为端点的射线方程为$x = x_1 + tx_2, t$取遍$(-\infty, \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}]$ (或$x = x_1 + tx_2$，t取遍$(-\infty, 0]$)。

证 据空间直线方程定义即可证明。

推论 2. 若 $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots x_{1,n})$ 与$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \cdots x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} \neq 0$，那么当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > 0$ 且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时以$x_1, x_2$为端点的线段方程为 $x = x_1 + tx_2$，其中t取遍$[0, \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}]$；当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > 0$且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时以$x_1$，$x_2$为端点的线段为$x = x_1 + tx_2$，其中$t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}, 0]$；当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < 0$且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时以$x_1, x_2$为端点的线段方程为$x = x_1 + tx_2$，其中$t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}, 0]$；当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < 0$且 $\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$ 以x_1，x_2为端点的线段方程为$x = x_1 + tx_2$，其中t取遍$[0, \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}}]$。

证 据推论 1 即得证。

定理 6. 若 $x_1 = (x_{1,1}, x_{1,2}, \cdots x_{1,n})$ 与$x_2 = (x_{2,1}, x_{2,2}, \cdots x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，$x_2 \neq (0, 0, \cdots 0), \sum_{j=1}^{n} x_{2,j} = 0$，那么当$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j'} > 0$，且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} > \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时过$x_1, x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为$A_1$，则$A_1 = \{x|x = x_1 + tx_2, t$取遍$(-\infty, \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{x_{2,j'}}]\}$ (或$A_1 = \left\{x|x = x_1 + tx_2, t\text{取遍}[0, +\infty)\right\}$)；反之，一切形如$x_1 + tx_2$($t$取遍$(-\infty, \frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{x_{2,j'}}]$) (或$x_1 + tx_2$($t$取遍$[0, +\infty)$))的点都在$A_1$中。当$x_{2,j'} > 0$，且$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} < \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$时设过两点$x_1, x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为$A_2$，则$A_2 = \{x|x = x_1 + tx_2, t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} - \sum_{j=1}^{n} x_{1,j}}{x_{2,j'}}, +\infty)\}$

(或$A_2=\{x|x=x_1+tx_2,t$取遍$(-\infty,0]\}$);反之，一切形如x_1+tx_2(t取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}},+\infty)$)(或$x_1+tx_2$($t$取遍$(-\infty,0]$))的点都在$A_2$中。当$x_{2,j'}<0$，且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1$，$x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为$A_3$，则$A_3=\{x|x=x_1+tx_2,t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}},+\infty)\}$(或$A_3=\{x|x=x_1+tx_2,t$取遍$(-\infty,0]\}$);反之，一切形如$x_1+tx_2$($t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}},+\infty)$)(或$x_1+tx_2$($t$取遍$(-\infty,0]$))的点都在$A_3$中。当$x_{2,j'}<0$，且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线的点集为$A_4$，则$A_4=\{x|x=x_1+tx_2,t$取遍$(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}}]\}$，(或$A_4=\{x|x=x_1+tx_2,t$取遍$(-\infty,0]\}$);反之，一切形如$x_1+tx_2$($t$取遍$(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}}]$)(或$x_1+tx_2$($t$取遍$[0,+\infty)$))的点都在$A_4$中。这里$j'\in\{1,2,\cdots n\},x_{2,j'}\neq 0$。

证，只证定理的第一部分。

$\because x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})\in R^n,x_2\neq(0,0,\cdots 0)$，$\sum_{j=0}^{n}x_{2,j}=0$，那么自然数$n>1$，且至少存在一个$j\in\{1,2,\cdots n\}$使$x_{2,j}\neq 0$，故不仿设这个$j$为$j'$那么$x_{2,j'}\neq 0$。

若以过两点x_1,x_2的直线 L 作平面直角坐标系 xoy 的 y 轴，则

$$y=x_{2,j'}t+x_{2,1}t+x_{2,2}t\cdots+x_{2,n}t+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$$

(这里t取遍全体实数)是一次函数。 (1)

若设直线L上的点的集合为B，集合$C=\{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}|a=(x_{i,1},x_{i,2},\cdots x_{i,n}),i$属于自然数$,a\in B\}$，则 B~C,又若设 y 轴上的点的集合为 D,则由引理得 B~D，那么 B~C~D。若直线 L 上的点x_1与点x_2分别与y轴上的点x_1',x_2'对应,则由上可知点x_1'与$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$对应,点x_2'与$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$对应，那么点x_1与点x_1'重合，点x_2与点x_2'重合。

很明显，由(1)式可知一定存在实数a_1使

$$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}=x_{2,j'}a_1+x_{2,1}a_1+x_{2,2}a_1+\cdots+x_{2,n}a_1+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j} \quad (2)$$

也一定存在实数a_2使

$$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}=x_{2,j'}a_2+x_{2,1}a_2+x_{2,2}a_2+\cdots+x_{2,n}a_2+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j} \quad (3)$$

若设集合$E=\{x_{2,j'}t+x_{2,1}t+x_{2,2}t+\cdots+x_{2,n}t+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\,|t$取遍全体实数$\}$及集合$F=\{x\,|\,x=x_{2,1}\mathrm{t}+x_{2,2}t+\cdots+x_{2,n}t+\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$，$t$取遍全体实数$\}$,则$E\sim F$,那么$B\sim C\sim D\sim E\sim F$。由于$x_1,x_2\in R^n$,那么$t\in R$时得$x_1+tx_2=(x_{1,1}+tx_{2,1},x_{1,2}+tx_{2,2},\cdots,x_{1,n}+tx_{2,n})$，那么$x_{1,1}+tx_{2,1}$，$x_{1,2}+tx_{2,2},\cdots$，$x_{1,n}+tx_{2,n}$为点$x_1+tx_2$的分向量，那么若设集合$G=\{x_1+tx_2|t$取遍全体实数$\}$,则得 F~G,那么 B~C~D~E~F~G,那么当$x_{2,j'}>0$,且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时据（3）(或（2）)式及直线 L 上的点皆为 n 维空间的点与 n 维空间的点的位置是确定的可得$A_1=\{x|x=x_1+tx_2,t$取遍$(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}}]\}$(或$A_1=\{x|x=x_1+tx_2,t$取遍$[0,+\infty)\}$);

推论 1. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$为 n 为维欧式空间 R^n 中的两点，$x_2\neq(0,0,\cdots 0),\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}=0$，那么当$x_{2,j'}>0$，且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时过$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线方程为$x=x_1+tx_2$，$t$取遍$(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}}]$(或$x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍$[0,+\infty)$)；当$x_{2,j'}>0$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时过两点 x_1,x_2 且以 x_2(或x_1) 为端点的射线方程为 $x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}},+\infty)$（或 $x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍 $(-\infty,0]$)；当

$x_{2,j'}<0$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$ 时过两点 x_1,x_2 且以 x_2(或x_1) 为端点的射线方程为 $x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍 $[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}},+\infty)$ (或 $x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍 $(-\infty,0]$)；当 $x_{2,j'}<0$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$ 时过两点 x_1,x_2 且以 x_2(或x_1) 为端点的射线方程为 $x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍 $(-\infty,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}}]$(或 $x=x_1+tx_2$，其中 t 取遍 $[0,+\infty)$)；这里 $j'\in\{1,2,\cdots n\},x_{2,j'}\neq 0$。

证，据空间直线方程定义即可证明。

推论 2. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为n为维欧式空间 R^n 中的两点，$x_2\neq(0,0,\cdots 0),\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}=0,$ 那么当$x_{2,j'}>0,$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时以$x_1,x_2$为端点的线段方程为$x=x_1+tx_2,t$取遍$[0,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}}]$; 当$x_{2,j'}>0$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时以$x_1,x_2$为端点的线段方程为$x=x_1+tx_2$,其中$t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}},0]$;当$x_{2,j'}<0$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时以$x_1,x_2$为端点的线段方程为$x=x_1+tx_2$,其中$t$取遍$[\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}},0]$; 当$x_{2,j'}<0$且$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{,j}$时以$x_1,x_2$为端点的线段方程为$x=x_1+tx_2$,其中$t$取遍$[0,\frac{\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}}{x_{2,j'}}]$,这里$j'\in\{1,2,\cdots n\},x_{2,j'}\neq 0$。

证 据推论 1 即得证。

定理 7. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为n为维欧式空间 R^n 中的两点，$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$，那么当$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线点集为$A_1$,则$A_1=\{x\big|x=tx_1+(1-t)x_2,t$取遍$[0,+\infty)\}$ (或$A_1=\{x\big|x=tx_1+(1-t)x_2,t$取遍$(-\infty,1]\}$); 反之，一切形如($tx_1+(1-t)x_2$ (t取遍$[0,+\infty)$) (或 $tx_1+(1-t)x_2$(t取遍$(-\infty,1]$)) 的点都在 A_1 中。

当$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$时设过两点$x_1,x_2$且以$x_2$(或$x_1$)为端点的射线点集为$A_2$,则$A_2=\{x\big|x=tx_1+(1-t)x_2,t$取遍$[0,+\infty)\}$ (或$A_2=\{x\big|x=tx_1+(1-t)x_2,t$取遍$(-\infty,1]\}$);反之，一切形如 $tx_1+(1-t)x_2$ (t取遍$[0,+\infty)$)(或 $tx_1+(1-t)x_2$(t取遍$(-\infty,1]$)) 的点都在 A_2 中。

证 只证定理的第一部分。

若以过两点 x_1,x_2 的直线 L 作平面直角坐标系 xoy的y轴，则据 $\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 知 $y=(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 是一次函数，这里 t 取遍全体实数，若设直线 L 上的点的集合为 B，集合 $C=\{\sum_{j=1}^{n}x_{i,j}\big|a=(x_{i,1},x_{i,2},\cdots x_{i,n}),i\in N,a\in B\}$，则 B~C.又若设 y 轴上的点的集合为 D，则据引理得 B~D，那么 B~C~D.若直线 L 上的点 x_1与点x_2 分别与 y 轴上的点 x_1',x_2' 对应，则由上可知点 x_1' 与实数 $\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$ 对应，点 x_2' 与实数 $\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 对应，那么点x_1与点x_1'重合，点x_2与点x_2'重合。

很明显，一定存在实数 a_1 使

$$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}=(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})a_1+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j} \qquad (1)$$

也一定存在实数 a_2 使

$$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}=(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})a_2+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j} \qquad (2)$$

由于$x_1,x_2\in R^n$，那么$tx_1+(1-t)x_2=t(x_1-x_2)+x_2=(t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1},t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2},\cdots t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n})$,那么$t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}$, $t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2},\cdots t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}$, 为点 $tx_1+(1-t)x_2$ 的分向量。由于 $(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}=[t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}]+$

$[t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2}]+\cdots+[t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}]$，那么当设集合 $E=\{tx_1+(1-t)x_2 \mid t\text{取遍全体实数}\}$ 及集合 $F=\{(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j} \mid t\text{取遍全体实数}\}$ 时，则得 $E\sim F$。由于 $D\sim F$，那么 $B\sim C\sim D\sim E\sim F$，那么当 $\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$ 时，据(2)(或(1))式及直线 L 上的点均为 n 维点与一次函数性质和 n 维点的位置是确定的可得 $A_1=\{x \mid x=tx_1+(1-t)x_2,\ t\text{取遍}[0,+\infty)\}$（或 $A_1=\{x \mid x=tx_1+(1-t)x_2,\ t\text{取遍}(-\infty,1]\}$），证毕。

推论 1. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与 $x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$，那么当 $\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 时过两点 x_1,x_2 且以 x_2（或 x_1）为端点的射线方程为 $x=tx_1+(1-t)x_2$，其中 t 取遍 $[0,+\infty)$（或 $x=tx_1+(1-t)x_2$，其中 t 取遍 $(-\infty,1]$）；$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}<\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 时过两点 x_1,x_2 且以 x_2（或 x_1）为端点的射线方程为 $x=tx_1+(1-t)x_2$，其中 t 取遍 $[0,+\infty)$（或 $x=tx_1+(1-t)x_2$，t 取遍 $(-\infty,1]$）。

证 据空间直线方程的定义即可证明。

推论 2. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与 $x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为 n 维欧式空间 R^n 中的两点，$\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$，那么当 $\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}>\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 时以 x_1,x_2 为端点的线段方程为 $x=tx_1+(1-t)x_2$，取遍 $[0,1]$。

证 据推论 1 即可证明。

定理 8. 若 x_1,x_2 为开集 $\Omega\subset R^n$ 中的两点，则以 x_1,x_2 为端点的线段 $x_1,x_2\subset\Omega$，这里 R^n 表 n 维欧式空间。

证 先设线段 x_1,x_2 上的点的集合为 A，集合 $B=\{(\sum_{i=1}^{n}x_i'^2)^{\frac{1}{2}} \mid i=1,2,\cdots n, a=(x_1',x_2',\cdots x_n'), a\in A\}$，那么 A~B，那么线段 x_1,x_2 上的每一点亦均代表一个范数。若结论不成立，则在线段 x_1,x_2 上至少存在异于 x_1 与 x_2 的点 $x_3\notin\Omega$，那么对线段 x_1x_3 而言，除点 x_3 外的其它点都在 Ω 中。于是在线段 x_1x_3 上无限靠近 x_3 处选取点 x_4，便存在 $\delta_4>0$ 使 $\cup(x_4,\delta_4)\subset\Omega$，若 $x_3\in\cup(x_4,\delta_4)$，则 $x_3\in\Omega$，那么矛盾；若 $x_3\notin\cup(x_4,\delta_4)$，又可在线段 x_1x_3 上更靠近 x_3 处再选取点 x_5（即使 $|x_3-x_5|<|x_3-x_4|$）时，则存在 $\delta_5>0$ 使 $\cup(x_5,\delta_5)\subset\Omega$，那么若 $x_3\in\cup(x_5,\delta_5)$，并类似地进行下去时，便可得 $[|x_3|,|x_4|]\supset[|x_3|,|x_5|]\supset\cdots\supset[|x_3|,|x_n|]$，这里 $|x_i|(i=3,4,\cdots n)$ 表线段 x_1x_3 上的点 x_i 的范数，同时自然数 n>3。

那么据区间套定理得

$$\bigcap_{n\to+\infty}^{+\infty}[|x_3|,|x_n|]=\{|x_3|\} \tag{1}$$

若如上类似的进行下去时不存在 $\delta_n>0$（自然数 $n>3$）使点 $x_3\in\cup(x_n,\delta_n)$，那么数 $|x_3|$ 不在闭区间 $[|x_3|,|x_n|]$ 内，这样便与（1）式矛盾。证毕。

定理9. 若 $x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$ 与 $x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$ 为开集 $\Omega\subset R^n$（R^n 表 n 维欧式空间）中的两点，$\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$，又若以 x_1,x_2 为端点的线段的点集为 A，则 $A=\{x \mid x=tx_1+(1-t)x_2, t\text{取遍}[0,1]\}$；反之，一切形如 $tx_1+(1-t)x_2$，（t 取遍 $[0,1]$）的点都在点 A 中。

证 只证定理的上半部分。

据定理 9 知以 x_1,x_2 为端点的线段 $x_1,x_2\subset\Omega$，那么线段 x_1,x_2 上的点均为 n 维点，由于 $\Omega\subset R^n$（R^n 表 n 维欧式空间），那么过两点 x_1,x_2 的直线 $L\subset R^n$，若以过两点 x_1,x_2 的直线 L 作平面直角坐标系 xoy 的 y 轴，则据 $\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}\neq\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}$ 知 $y=(\sum_{j=1}^{n}x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n}x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n}x_{2,j}$ 是一次函数，这里的 t 取遍全体实数，若设直线 L 上的点的集合为 B，集合 $C=\{\sum_{j=1}^{n}x_{i,j} \mid a=(x_{i,1},x_{i,2},\cdots x_{i,n}), i\in N, a\in B\}$，

则 B~C.又若设 y 轴上的点的集合为 D,则据引理得 B~D，那么 B~C~D。若直线 L 上的点x_1与点x_2分别与 y 轴上的点 x_1',x_2' 对应，则由上可知点 x_1' 与实数$\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$ 对应，点 x_2' 与实数$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}$ 对应，那么点 x_1与点x_1' 重合，点 x_2'与点x_2' 重合，$\because y=(\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}$, 那么当t=0时函数值 $y=\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}$，当 t=1 时函数值 $y=\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$ 。

由于 $x_1,x_2\in R^n$，那么$t\in R$时得$tx_1+(1-t)x_2$ $=t(x_1-x_2)+x_2=(t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1},\quad t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2},\cdots,\quad t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n})$,那么$t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}$, $t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2},\cdots,\quad t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}$为点$tx_1+(1-t)x_2$的分向量。由于$(\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}=$ $[t(x_{1,1}-x_{2,1})+x_{2,1}]+[t(x_{1,2}-x_{2,2})+x_{2,2}]+\cdots$ $+[t(x_{1,n}-x_{2,n})+x_{2,n}]$,那么当设集合$E=\{tx_1+(1-t)x_2 \mid t\text{取遍全体实数}\}$及集合$F=\{(\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}-\sum_{j=1}^{n} x_{2,j})t+\sum_{j=1}^{n} x_{2,j} \mid t\text{取遍全体实数}\}$时，则得 E~F,由于 D~F,那么 B~C~D~E~F。

由于直线L上的点x_1与实数$\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$对应,点x_2与实数$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}$对应，那么据一次函数性质与直线 L 上的点均为 n 维点及 n 维空间 R^n 中点的位置是确定的可知 $A=\{x \mid x=x_1+(1-t)x_2,\ t\text{取遍}[0,1]\}$。

推论 若$x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$为开集$\Omega\subset R^n$($R^n$表$n$维欧式空间)中的两点,$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}\neq\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$,那么以$x_1,x_2$为端点的线段方程为$x=tx_1+(1-t)x_2$,其中$t$取遍[0,1]。

证 据空间直线方程定义可得证明。

定理10. 若$x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$为开集$\Omega\subset R^n$($R^n$表$n$维欧式空间)中的两点,$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}=\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$,又若以$x_1,x_2$为端点的线段的点集为$A$,则$A=\{x \mid x=tx_1+(1-t)x_2, t\text{取遍}[0,1]\}$;反之，一切形如$tx_1+(1-t)x_2$,($t$取遍[0,1]) 的点都在点 A 中。

证 仿定理 8,10 的证法即可证明。

推论1. 若$x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$为开集$\Omega\subset R^n$($R^n$表$n$维欧式空间)中的两点,$\sum_{j=1}^{n} x_{2,j}=\sum_{j=1}^{n} x_{1,j}$,则以$x_1,x_2$为端点的线段方程为$x=tx_1+(1-t)x_2$,其中$t$取遍[0,1]。

证 据空间线段方程定义可得证明。

推论2. 若$x_1=(x_{1,1},x_{1,2},\cdots x_{1,n})$与$x_2=(x_{2,1},x_{2,2},\cdots x_{2,n})$为开集$\Omega\subset R^n$($R^n$表$n$维欧式空间，$n>1$)中的两点，则以$x_1,x_2$为端点的线段方程为$x=tx_1+(1-t)x_2$,其中$t$取遍[0,1]。

证 据定理 10 之推论即得证。

推论3. 若开集$\Omega\subset R^n$(R^n表n维欧式空间，$n>1$)中存在不在同一直线上的三点，则Ω为开域。

证 据推论 2 可证。

下面是例题。

例 1 求过 1 维欧式空间 R^1 中两点 $x_1=3$与$x_2=5$ 的直线方程。

解 据定理 1 之推论 1 得过 1 维欧式空间 R^1 中的两点 $x_1=3$与$x_2=5$ 的直线方程为 x=3+5t,t 取遍全体实数。

例 2 求过点 $x_1=3$与点$x_2=5$且以点$x_2=5$为端点的射线方程。

解 据定理 5 之推论 1 得方程为 $x=3+5t,t$取遍$(-\infty,\frac{5-3}{5}]$.

例 3 求过点 $x_1=3$与点$x_2=5$且以点$x_1=3$为端点的射线方程。

解 据定理 5 之推论 1 得方程为 $x=3+5t,t$取遍$[0,+\infty)$.

例 4 求以点 $x_1=3$与点$x_2=5$ 为端点的线段的方程。

解 据定理 5 之推论 2 得方程 $x=3+5t,t$取遍$[0,\frac{5-3}{5}]$.

例 5 求以点 $x_1=5$与点$x_2=3$ 为端点的线段的方程。

解 据定理 5 之推论 2 得方程为

$x = 5 + 3t, t$取遍$[\frac{3-5}{5}, 0]$.

例 6 求过点 $x_1 = (3, 0)$与点$x_2 = (5, -5)$, 且以点$x_2 = (5, -5)$ 为端点的射线方程。

解 据定理 6 之推论 1 得方程为 $t = 3 + 5t, t$取遍$(-\infty, \frac{0-3}{5}]$.

致谢

中英文摘要由编辑部完成，特表感謝。

参考文献

[1] 廖可人，李正元编. 数学分析[M]. 高等教育出版社，1988 年 1 月第 3 次印刷.

[2] 常庚哲，史济怀. 数学分析教程[M]. 中国科大出版社，2014 年 6 月第 4 次印刷.