Global Science Publishing

概率论中的贝奴利定理的修正

梁自温
洞口县竹市镇卫生院，邵阳市，湖南省，中国

摘要：本文指出概率论中贝努利定理在常见文献中存在定理陈述与证明缺失或错误的问题，并对其进行修正。首先给出贝努利试验、相关事件定义，证明了如事件重复出现的等价性、概率计算等引理及推论。接着通过定理阐述在不同条件下贝努利试验中事件出现次数的概率计算方法，如在特定次数试验中事件 A 出现次数范围的概率、事件 A 恰好出现 k 次的概率等，并通过多个射击命中次数的例子进行计算说明。最后强调原贝努利定理需修正，仅保留定义，以防错误定理带来不良影响。

关键词：贝努利定理；贝努利试验；概率修正；随机事件

The Modified Bernoulli Theorem in Probability Theory

Ziwen Liang
Zhushe Township Health Center, Dongkou County, Shaoyang City, Hunan Province, China

Abstract: This paper points out that the Bernoulli theorem in probability theory has problems such as the lack or incorrectness of theorem statements and proofs in common literature, and corrects it. Firstly, the definitions of Bernoulli trials and related events are given, and lemmas and corollaries such as the equivalence of event repetitions and probability calculations are proven. Then, theorems are used to elaborate on the probability calculation methods for the number of occurrences of events in Bernoulli trials under different conditions, such as the probability of the range of occurrences of event A in a specific number of trials, the probability of event A occurring exactly k times, etc., and are illustrated by calculating multiple examples of the number of hits in shooting. Finally, it is emphasized that the original Bernoulli theorem needs to be corrected, and only the definition should be retained to prevent the adverse effects of incorrect theorems.

Keywords: Bernoulli Theorem; Bernoulli Trial; Probability Correction; Random Event

本人仅在文献[1–5]中见到上述定理，但均无定理陈述与证明，由于定理本身错误，故有点证明也是错误的，故应予修正。

定义 1　若随机试验 E 只有 A 与$\bar{A}$两种结果，则这样的随机试验叫贝努利试验。把贝努利试验独立重复地作 n 次所构成的试验叫 n 重贝努利试验，其中的每 n 次试验又称为一个贝努利试验。

定义 2　若 k∈Z$^+$，定义 AA$\cdots A^{(k)}$为随机事件 A 出现 k 次。

定义 3　若 k∈Z$^+$，定义 AA$\cdots A_k$表 k 个随机事件 A 的交。

引理 1.若 k∈Z$^+$，又若 A 表随机事件，则 AA$\cdots A^{(k)}$ = AA$\cdots A_k$

证　k=1 时命题成立。若 k=n≥1 时命题成立，即得 AA$\cdots A^{(n)}$=AA$\cdots A_n$，又设 A 为第 n+1 个 A，则(AA$\cdots A^{(n)}$)∩A=(AA$\cdots A_n$)∩A，由于(AA$\cdots A^{(n)}$)∩A=AA$\cdots A^{(n+1)}$，(AA$\cdots A_n$)∩A=AA$\cdots A_{n+1}$，那么命题成立。

推论：若 k∈Z$^+$，A 为随机事件，则 P(AA$\cdots A^{(k)}$)=P(AA$\cdots A_k$)

证　略

引理 2 若 A 为随机事件，$k\in Z^+$，$AA\cdots A_k\supset A$，则 $P(A|AA\cdots A_k)=P(A)$

证 ∵$AA\cdots A_k\supset A$，∴$AA\cdots A_k$ 出现一次 A_n 必出现一次，那么 A 出现的次数即就是 $A|AA\cdots A_k$ 出现的次数，∴$P(A|AA\cdots A_k)=P(A)$

推论 1 若 A 为随机事件，$k\in Z^+$，$AA\cdots A_k\supset A$，则 A 与 $AA\cdots A_k$ 相互独立。

证 略

推论 2 若 A 为随机事件，$k\in Z^+$，则 A 与 $AA\cdots A_k$ 相互独立。

证 略

引理 3 若 $k\in Z^+$，A 表随机事件，$P(A)=P$，则 $P(AA\cdots A^{(k)})=P^k$，

证 若 k=1，命题成立；若 $k=n\geq1$ 命题成立，即得 $P(AA\cdots A^{(n)})=P^n$，由引理 1 的推论即得 $P(AA\cdots A^{(n)})=P(AA\cdots A_n)$，那么 $P(AA\cdots A_n)=P^n$。现令 A 为第 n+1 个 A，据 $P(A_{n+1})=P$，再由引理 2 的推论便得 $P(AA\cdots A_n)P(A_{n+1})=P^n\,P=P^{n+1}$,由于据引理 2 之推论得 $AA\cdots A_n$ 与 A_{n+1} 互相独立，则 $P(AA\cdots A_n)P(A_{n+1})=P(AA\cdots A_{n+1})$，那么 $P(AA\cdots A_{n+1})=P^{n+1}$，即得 $P(AA\cdots A^{n+1})=P^{n+1}$，于是定理可证。

推论 若 $k\in Z^+$，随机事件 A 的概率 $P(A)=P$，则 $P(AA\cdots A_k)=P^k$。

证 由引理 1 之推论得证

引理 4 设随机试验 E 的全部基本事件为 $A_1, A_2\cdots A_n$，$n\geq2$，，则$\sum_{i=1}^{n}P(A_i)=1$。

证 因为 $A_1, A_2\cdots A_n$,为随机试验 E 的全部基本事件，$n\geq2$,则其两两互斥，又构成一互斥完备群。即得 $p(\sum_{i=1}^{n}A_i)=\sum_{i=1}^{n}p(A_i)$,由于≥2，则可设其中若干个（不是全部）的和事件为 A，则其余事件的和事件为$\bar{A}$,那么 $A+\bar{A}=$,$\sum_{i=1}^{n}A_i$ 即得 $P(A+\bar{A})=P(\sum_{i=1}^{n}A_i)$,由于 $p(A+\bar{A})=1$,则 $p(\sum_{i=1}^{n}A_i)=1$。 证毕

引理 5 若随机试验 E 的结果只有 A 与$\bar{A}$，则 $p(A)=p(\bar{A})=0.5$

证，据古典概型可证。

推论 若 A 为随机试验 E 的随机事件，则 $P(A)=P(\bar{A})=0.5$ 与随机试验 E 只有 A 与$\bar{A}$两种结果等价。

证∵$p(A)=P(\bar{A})=0.5$，则 $p(A+\bar{A})=1$。由于 A 为 E 的一个结果，那么由引理 4 知只有 A 与$\bar{A}$两种结果。余下部分不证自明。

引理 6 若 A，B 为随机试验 E 的随机事件，又 $B\supset A$,则 $P(A|B)=P(A)$

证 ∵$B\supset A$,则 B 出现一次 A 也要出现一次，所以 $A|B$ 的出现次数即为 A 的出现次数，那么 $P(A|B)=P(A)$。

推论 若 k_1，$k_2\in Z^+$，A 为贝努利试验中的随机事件，则 $AA\cdots A^{(K_1)}$与$\bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}^{(K_2)}$相互独立。

证 略

定理 1 若 $n\in Z^+$，$n\geq3$，贝奴利试验只有 A 与$\bar{A}$两种结果，又若把连续作 n 次贝奴利试验视为一个 n 次贝努利试验，$i\in\{1,2\ldots n-1\}$，$j\in\{2,3\ldots n-1\}$，$i<j$,则在$(j-i)+1$ 个贝努利试验中事件 A 最少出现 i 次最多出现 j 次的概率为$[(j-i)+1]0.5^n$。

证 只证 i=1，j=2 的情况。

设事件 B_1={在一个 n 次贝努力实验中 A 出现 1 次，$\bar{A}$出现 n−1 次}，

B_2={在一个 n 次贝努力实验中 A 出现 2 次，$\bar{A}$出现 n−2 次}，

……

B_{n-1}={在一个 n 次贝努力实验中 A 出现 n−1 次，$\bar{A}$出现 1 次}。

又设 $C_1=B_1+B_2$,则 C_1 与在 2 个 n 次贝努利试验中 A 最少出现 1 次，最多出现 2 次等价。则据引理 3，5，6 得 $P(C_1)=P(B_1)+P(B_2)=2\times0.5^n$。同理可证在 3 个 n 次贝努利试验中事件 A 至少出现 1 次至多出现 3 次的概率为 3×0.5^n，⋯，在 n−1 个贝努利试验中事件 A 至少出现 1 次至多出现 n−1 次的概率为$(n-1)0.5^n$。其余证法同上。

定理 2 若 $n\in Z^+$，$n\geq3$，$i\in\{n-1, n-2,\cdots, 2\}$，$j\in\{n-2, n-3,\cdots, 1\}$, $i>j$, 贝努利试验中只有 A 与$\bar{A}$两种结果，又若把连续作 n 次贝努利试验视为一个

n 次贝努利试验，则在$(i-j)+1$ 个 n 次贝奴利试验中事件 A 至多出现 i 次至少出现 j 次的概率为$[(i-j)+1]0.5^n$。

证　同定理 1

推论：若 n∈Z^+，n≥3，i∈{1, 2, n−2}，j∈{2, 3, n−1}，i<j，贝奴利试验只有 A 与$\bar{A}$两种结果，则事件 A 至少出现 i 次至多出现 j 次与事件 A 至多出现 n−i 次至少出现 n−j 次的概率是相同的。

证 据定理 1，2 可证。

定理 3　若 k, n∈Z^+, n≥2, 1≤k≤n-1,又若贝奴利试验只有 A 与$\bar{A}$两种结果，又若把 n 次贝奴利试验视为一个贝奴利试验，则在一个 n 次贝奴利试验中事件 A 出现 k 次的概率为$0.5^k+0.5^{n-k}-0.5^k\times0.5^{n-k}$

证 设事件 B={在一个 n 次贝努力实验中 A 出现 k 次或$\bar{A}$出现 n−k 次}, 又设

$AA\cdots A^{(k)}=C, \bar{A}\bar{A}\cdots\bar{A}^{(n-k)}=D$，则 B=C+D。

由于 C⊃D，则由引理 6 知 C 与 D 相互独立，又由于 C 与 D 不互斥，则 P(B) = P(C) + P(D) − P(CD) $=0.5^k+0.5^{n-k}-0.5^k\times0.5^{n-k}$，即就是事件 A 恰好出现 k 次的概率。

例 1　求射击 1 次恰好击中 1 次的概率

解　据古典概率得其概率 p(A)=0.5

例 2 求射击 2 次恰好击中 1 次的概率

解 其概率为 $p(A)=0.5+0.5^{2-1}-0.5\times0.5^{2-1}=0.75$

例 3 求射击 3 次恰好击中 1 次的概率

解 其概率为 $p(A) = 0.5 + 0.5^{3-1}- 0.5\times0.5^{3-1}=0.625$

例 4 求射击 4 次恰好击中 2 次的概率

解 其概率为 $p(A)=0.5^2+0.5^{4-2}-0.5^2\times0.5^{4-2}=0.4375$

例 5 求射击 5 次恰好击中 3 次的概率

解 其概率为 $p(A)=0.5^3+0.5^{5-3}-0.5^3\times0.5^{5-3}=0.34375$

例 6 求射击 6 次最少击中 1 次最多击中 2 次的概率

解 其概率为$[(2-1)+1]0.5^3=0.25$

例 7 求射击 6 次最少击中 1 次最多击中 3 次的概率

解 其概率为 $p(A)=[(3-1)+1]0.5^3=0.375$

例 8 若∈Z^+，则射击 n 次命中 n 次的概率为 0.5^n

解 设 A 表射击事件。

若 n=1，命题成立，即得 $P(A^{(1)})=0.5$；若 n=k≥时命题成立，得 $P(AA\cdots A^{(K)})=0.5^K$,即得 $P(AA\cdots A^{(K)})P(A^{(1)})=0.5^K\times0.5=0.5^{K+1}$，由于 $A^{(1)}$与 $AA\cdots A^{(K)}$相互独立，又得 $P(AA\cdots A^{(K)}A^{(1)})=P(AA\cdots A^{(K)})P(A^{(1)})$，即得 $P(AA\cdots A^{(K)}A^{(1)})=0.5^{K+1}$，又由于 $AA\cdots A^{(K+1)}=AA\cdots A^{(K)}A^{(1)}$,即得 $P(AA\cdots A^{(K+1)})=0.5^{K+1}$。完毕。

从上不难看出，为什么概率论中的贝努利定理有错误，因此除保留其定义外，其定理应予删除，否则后患无穷。

致谢

中英文摘要由编辑部完成，特表感谢。

参考文献

[1] 申招斌，高中数学 [M]. 湖南教育出版社, 2014 年 8 月第 6 版, P340.

[2] 中学数学教学手册 [M].北京教育出版社，1990 年 6 月第 1 次印刷, P661.

[3] 中国人民大学教研室编.概率论与数理统计[M] .中国人民大学出版社, 1989 年 2 月第 3 次印刷, P25.

[4] 黄文旭，张庆等. 概率论与数理统计[M]. 清华大学出版社, 2011 年 10 月第 1 次印刷, P20.

[5] 李秀昌. 医药数理统计[M]. 全国高等中医药教育教材, 人民卫生出版社, 2023 年 12 月第 3 版, P16.