环球数学进展
GSP Advances in Mathematics
Global Science Publishing

关于有限和式$\sum\frac{1}{k!}$的初等表示

刘雨喆
贵州大学数学与统计学院,贵阳市,贵州省,中国

摘要：Γ-函数是一个非常重要的非初等函数，其具有许多理论价值和应用价值。关于Γ-函数我们已经知道$\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)}=\mathrm{e}$，而本文就与之相关的有限和式$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(k+1)}$作出讨论，并给出该有限和式的不完全第二型Euler积分表示和下取整函数表示，这两种计算公式都是精确的，其中对应下取整函数给出的计算公式，我们还将指出它是初等的。

关键词：Gamma函数；求和公式；无穷级数

The Elementary Representation of the Finite Sum $\sum\frac{1}{k!}$

Yuzhe Liu
School of Mathematics and Statistics, Guizhou University, Guiyang City, Guizhou Province, China

Abstract: Γ-function is an important non-elementary function which has many theoretical and applied values. For the Γ-function, it is well known that $\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{1}{\Gamma(k+1)}=\mathrm{e}$. We do some researches on the finite sum $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\Gamma(k+1)}$ and provide two accurate formulas of it where one involves the Euler integral of second kind and the other one involves the floor function in this paper. Moreover, we point out that the formula which related to floor function is elementary.

Keywords: Gamma function; Summation formulas; Infinite series

---

1 引言

Γ-函数指的是关于变量s的积分$\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$，其在许多数学分支中扮演着重要角色，关于$\Gamma$-函数的研究目前已经有许多丰富的成果。$\Gamma$-函数起源于对阶乘的解析延拓，这一问题由 Goldbach 在给 D. Bernoulli 的信中提出，而由 Euler 解决，因而称作第二型 Euler 积分。而第一型 Euler 积分则是著名的 Beta 函数，在 Euler 对阶乘进行解析延拓的过程中起着至关重要的辅助作用。Euler 对Γ-函数给出了两个解析式，除了积分表示以外，另一个则是无穷乘积表示，即$\Gamma(s)=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{\left(1+\frac{1}{k}\right)^{s-1}}{1+\frac{s-1}{k}}$。目前我们所使用的记号$\Gamma(s)$则是由 Legendre 引入[1]。Gauss 和 Weierstrass 都对Γ-函数产生了浓厚兴趣，Gauss 指出$\Gamma(s)$可以由下式给出：

$$\Gamma(s)=\lim_{m\to\infty}\frac{1\cdot2\cdot3\cdots m}{s(s+1)(s+2)\cdots(s+m)}m^s,$$

见文献[2]。Weierstrass 也给出了与 Euler 和 Gauss 不同的表示：

$$\Gamma(s)=\frac{\mathrm{e}^{-\gamma s}}{s}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{s}{n}\right)^{-1}\mathrm{e}^{\frac{s}{n}}。$$

其中，$\gamma=0.57721\cdots$是 Euler–Mascheroni 常数，

见文献[1]等。

Askey–Roy 研究了不完全的第二型 Euler 积分，即 $\Gamma(s,\theta)=\int_\theta^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$，并指出

$$\Gamma(s,\theta)=\theta^s\mathrm{e}^{-\theta}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{L_n^{(s)}(\theta)}{n+1},$$

见文献[3]。其中

$$L_n^{(s)}(\theta)=\frac{x^{-s}\mathrm{e}^{\theta}}{n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}\theta^n}\left(\mathrm{e}^{-x}\theta^{n+s}\right)=\theta^{-s}\frac{1}{n!}\left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}-1\right)^n\theta^{n+s}$$

是二阶线微分方程

$$\theta\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}\theta^2}+(s+1-\theta)\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}\theta}+ny=0$$

的解，称作广义 Laguerre 多项式(generalized Laguerre polynomials)，见文献[4]。而本文也将从 $\Gamma(s,\theta)$ 出发，就 $s\in\mathbb{N}^+$ 的情形考虑了有别于上式的结果 $\Gamma(n+1,\theta)=\frac{n!}{\mathrm{e}^{\theta}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\theta^k}{k!}$，并由此指出

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\theta^k}{k!}=\frac{\mathrm{e}^{\theta}}{n!}\int_\theta^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x-1。$$

本文的论述结构如下：本文的第一部分将利用 Γ-函数的相关性质给出有限和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ 的两种表述，其一是非初等的不完全的第二型 Euler 积分表示 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{\mathrm{e}}{n!}\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x-1$，其二是下取整函数的表示 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor}{n!}$，本文还将说明后者表示的初等性。本文的第二部分则利用这两种表述方式给出了一些有趣的推论，其中包括 $\int_\theta^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x$，$\int_0^{\theta}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x$ 的初等表达式。

2 关于有限和式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ 的两个计算公式

文章的这一部分，将给出有限和式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ 的两个精确的计算公式。事实上，我们早已清楚 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}\approx\mathrm{e}-1$ 这一事实，且二者之间的误差估计可由 Taylor 公式的余项给出，但是给出该有限和式的精确表示仍然是有意义的，我们将利用它在文章的第二部分诱导出许多有趣的推论和结果。

2.1 有限和式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ 的不完全第二型Euler积分表示

Γ-函数也被称作完全的第二型 Euler 积分，其定义为 $\Gamma(s)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-1}\mathrm{d}x$，特别当积分区域取 $[a,b]$，$0<a\le b<+\infty$ 时，这时称第二型 Euler 积分是不完全的。习惯上，在区间 $[\theta,+\infty)$ 上的积分常被记作 $\Gamma(s,\theta)$。文章的这一部分将对不完全积分 $\Gamma(s,\theta)$ 在 $\theta>0$ 的情形下进行一个有趣讨论。

首先，根据分部积分，有

$$\Gamma(s,\theta)=-\int_\theta^{+\infty}x^{s-1}\mathrm{d}(\mathrm{e}^{-x})=-\left(x^{s-1}\mathrm{e}^{-x}\Big|_\theta^{+\infty}-\int_\theta^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x^{s-1}\right)$$

$$=(s-1)\int_\theta^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{s-2}\mathrm{d}x+\theta^{s-1}\mathrm{e}^{-\theta}$$

$$=(s-1)\Gamma(s-1,1)+\theta^{s-1}\mathrm{e}^{-\theta},$$

因此，对任意 $n\in\mathbb{N}$，有 $\Gamma(n+1,1)=n\Gamma(n,1)+\theta^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta}$，且容易算出 $\Gamma(1,\theta)=\int_\theta^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-\theta}$。如此，对于 $\Gamma(n+1,\theta)$ 的讨论就等价于考虑满足递推式 $x_{n+1}=nx_n+\theta^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta}$ (其中 $x_1=\mathrm{e}^{-\theta}$) 的数列 $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}^+}$。我们可以如下命题:

命题 1 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，$\theta>0$，有 $\Gamma(n+1,\theta)=\frac{n!}{\mathrm{e}^{\theta}}\sum_{k=0}^{n}\frac{\theta^k}{k!}$。

证 考虑递推式 $x_{n+1}=nx_n+\theta^{n-1}\mathrm{e}^{-\theta}$，$x_1=\mathrm{e}^{-\theta}$，其中 $x_n=\Gamma(n,\theta)$，$n\in\mathbb{N}^+$，则

$$\begin{aligned}x_{n+1}&=nx_n+\mathrm{e}^{-\theta}\theta^n\\&=n[(n-1)x_{n-1}+\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{n-1}]+\mathrm{e}^{-\theta}\theta^n=\ldots\\&=n\cdot[(n-1)\cdot[(n-2)\cdot[\ldots2\cdot[1\cdot x_1+\mathrm{e}^{-\theta}\theta]\\&\quad+\mathrm{e}^{-\theta}\theta^2]\ldots]+\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{n-2}]+\mathrm{e}^{-\theta}\theta^{n-1}]+\mathrm{e}^{-\theta}\theta^n\\&=n!x_1+\mathrm{e}^{-\theta}\left[\frac{n!\theta}{1!}+\frac{n!\theta^2}{2!}+\frac{n!\theta^3}{3!}+\cdots+\frac{n!\theta^n}{n!}\right]\end{aligned}$$

带入 $x_1=\mathrm{e}^{-\theta}$，就有 $n!x_1=\frac{n!\mathrm{e}^{-\theta}\theta^0}{0!}$，于是此命题成立。

在**命题 1** 中取 $\theta=1$，就得到下述推论:

推论 1 对任意的 $n\in\mathbb{N}$，有

$$\Gamma(n+1,1)=\frac{n!}{\mathrm{e}}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}。$$

利用不完全的第二型 Euler 积分，上述**推论 1** 给出了有限和 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ 的非初等解析式:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{\mathrm{e}}{n!}\int_{1}^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^{n}\mathrm{d}x-1。$$

2.2 有限和式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ 的下取整函数表示

记号 $\lfloor x\rfloor$ 表示对数 $x\in\mathbb{R}$ 进行向下取整，即不超过 x 的最大整数，例如 $\lfloor 7\rfloor=7$，$\lfloor 0.5\rfloor=0$，$\lfloor -1\rfloor=-1$，$\lfloor -1.732\rfloor=-2$ 等等，显然dxt 是定义在□ 上的函数，习惯上它被称作下取整函数。并且对于 $\lfloor x\rfloor$，下述引理指出dxt 是初等的。

引理 1 对任意 $x\in\mathbf{R}$，**恒有**

$$\lfloor x\rfloor=x+\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}(\tan\pi x)-\frac{1}{2}。$$

其中当 $x=\frac{2k+1}{2},k\in\mathbf{Z}$ 时，**上式中的** $\operatorname{arccot}(\tan\pi x)$ **被认为是** $\operatorname{arccot}(\tan(\pm\infty))=0$，**此时有** $\lfloor x\rfloor=\left\lfloor\frac{2k+1}{2}\right\rfloor=\frac{2k+1}{2}-\frac{1}{2}=k$。

关于下取整函数的性质，国内[5-7]都对其进行了研究。其中，文献[7]还研究了关于 $\lfloor x\rfloor$ 的非线性三项递推式。下述命题用下取整函数描述了有限和式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$。

命题 2 对任意的 $n\in\mathbf{N}$，**有**

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}=\frac{\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor}{n!}=$$

$$\frac{1}{n!}\left[(\mathrm{e}-1)n!+\frac{1}{\pi}\operatorname{arccot}\left(\tan(\pi(\mathrm{e}-1)n!)\right)-\frac{1}{2}\right]。$$

证 考虑命题在 n 成立的情形下，对于 $n+1$ 的情形有:

$$\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k!}=\frac{\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor}{n!}+\frac{1}{(n+1)!}=\frac{(n+1)\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor+1}{(n+1)!}\overset{\text{记作}}{=\!=}S,$$

那么对于 $S-\frac{\lfloor(\mathrm{e}-1)(n+1)!\rfloor}{(n+1)!}\overset{\text{记作}}{=\!=}\tilde{S}$，只需考虑它的分子 $(n+1)\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor-\lfloor(\mathrm{e}-1)(n+1)!\rfloor+1\overset{\text{记作}}{=\!=}\tilde{S}_{\text{numer}}$。

一方面，利用下取整函数的性质，对任意 $x\in\mathbf{R}^{+}$，$n\in\mathbf{N}^{+}$，有 $xn\geq\lfloor xn\rfloor\geq\lfloor x\rfloor n$，等号成立当且仅当 $xn\in\mathbf{N}^{+}$，于是

$$\tilde{S}_{\text{numer}}\leq(n+1)\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor-\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor(n+1)+1=1$$

由于 e 是超越的，所以 $\tilde{S}_{\text{numer}}<1$，再依据 $\tilde{S}_{\text{numer}}\in\mathbf{Z}$，所以 $\tilde{S}_{\text{numer}}\leq 0$，从而 $\tilde{S}\leq 0$。

另一方面，利用 $x>\lfloor x\rfloor, x\notin\mathbf{Z}$ 以及归纳假设，

$$\tilde{S}_{\text{numer}}-1>(n+1)\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor-(\mathrm{e}-1)(n+1)!$$

$$=(n+1)!\left[\frac{\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor}{n!}-(\mathrm{e}-1)\right]=-(n+1)!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

对于上式右侧的级数，利用带 Lagrange 余项的 Taylor 公式，有:

$$\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}=\frac{1}{(n+1)!}\left.\frac{\mathrm{d}^{n+1}\mathrm{e}^{x}}{\mathrm{d}x^{n+1}}\right|_{x=\xi}\cdot\left(x^{n+1}\right)_{x=1}$$

$$=\frac{\mathrm{e}^{\xi}}{(n+1)!}\leq\frac{\xi+1}{(n+1)!},\xi\in(-1,1),$$

从而 $-(n+1)!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}\geq-(\xi+1)>-2$。所以 $\tilde{S}_{\text{numer}}>-1$。再依据 $\tilde{S}_{\text{numer}}\in\mathbf{Z}$，所以 $\tilde{S}_{\text{numer}}\geq 0$，从而 $\tilde{S}\geq 0$。综上，$\tilde{S}=0$。这就得到了命题在 n 成立的情形下，对 $n+1$ 的情形也成立。

特别地，当 $n=1$ 时，$\sum_{k=1}^{1}\frac{1}{k!}=\lfloor\mathrm{e}-1\rfloor=1$ 显然，根据数学归纳原理，命题成立。

关于 $-(n+1)!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$ 亦可以作下面放缩，也可得到 $\tilde{S}_{\text{numer}}-1>-2$。

$$-(n+1)!\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{1}{k!}$$

$$=-1-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}-\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)}$$
$$-\frac{1}{(n+2)(n+3)(n+4)(n+5)}-\cdots$$
$$>-1-\frac{1}{n+2}-\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$
$$-\frac{1}{(n+3)(n+4)}-\frac{1}{(n+4)(n+5)}-\cdots$$
>-2。

3 一些推论

在这一部分，将给出若干关于有限和式 $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}$ 的推论。

推论 2 对任意 $n\in\mathbf{N}^+$， $\theta\in(0,1]$，有

$$\Gamma(n+1,\theta)=n!+O\left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right),$$

其中大 O 误差项的系数 c 满足 $|c|<\mathrm{e}^{\delta}$，这里 $\delta\in\mathbf{R}^+$ 是某个较小常数，且依赖于 θ，其由函数 e^x 在原点处带 Lagrange 型余项的 n 阶 Taylor 公式所诱导，精确地说，δ 应不小于如此的 ξ_θ，其保证下式成立:

$$\mathrm{e}^x\Big|_{x=\theta}=1+\theta+\frac{1}{2!}\theta^2+\cdots+\frac{1}{n!}\theta^n+\frac{\mathrm{e}^{\xi_\theta}}{(n+1)!}\theta^{n+1}$$

证 回顾**命题 1** 所给的结论: 对任何的 $n\in\square^+$ 和 $\theta>0$，有 $\Gamma(n+1,\theta)=\frac{n!}{\mathrm{e}^\theta}\sum_{k=0}^{n}\frac{\theta^k}{k!}$。那么，当 n 足够大时，由 Taylor 定理有 $\sum_{k=0}^{n}\frac{\theta^k}{k!}=\mathrm{e}^\theta-R_n(\xi)$，其中 $R_n(\xi)=\frac{\mathrm{e}^\xi}{(n+1)!}\theta^{n+1}$ 是 Lagrange 余项，ξ 取值于 0 的附近，即存在 $\delta\in\mathbf{R}^+$ 使得 ξ 是能满足 $\xi\in B(0,\delta)$ 的某个常数。所以,

$$\Gamma(n+1,\theta)=n!-\frac{\mathrm{e}^\xi\theta^{n+1}}{n+1}=n!+R,\ R=O\left(\frac{\theta^{n+1}}{n+1}\right)。$$

其中，大 O 误差项 R 的系数 c 的绝对值不超过 e^δ。

当 $\theta\in(0,1]$时，$\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta^{n+1}}{n+1}=0$，上式的误差 R 趋于 0；但当 $\theta\in(1,+\infty)$ 时，$\lim_{n\to+\infty}\frac{\theta^{n+1}}{n+1}=+\infty$，上式的误差 R 趋于无穷。

若在**推论 2** 中取 $\theta=1$，那么

$$\Gamma(n+1,\theta)=n!+O\left(\frac{1}{n+1}\right),$$

下面推论将给出 $\Gamma(n+1,\theta)$ 的一个准确的表述，且在下述推论的注记中，我们将根据**引理 1** 指出该表述是初等的。

推论 3 对任意 $n\in\mathbf{N}^+$ ，有

$$\Gamma(n+1,1)=\frac{\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor+n!}{\mathrm{e}}。$$

证 由**推论 1** 和**命题 2**，有

$$\frac{\lfloor(\mathrm{e}-1)n!\rfloor}{n!}=\frac{\mathrm{e}}{n!}\Gamma(n+1,1)-1,$$

从而推论成立。

注记 特别地，根据**引理 1**，$\Gamma(n+1,1)=\int_1^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x$ 的一个初等表达为:

$$n!+\left(\frac{1}{\mathrm{e}\pi}\operatorname{arccot}(\tan(\pi(\mathrm{e}-1)n!))-\frac{1}{2\mathrm{e}}\right)。$$

值得一提的是，**推论 3** 不适用于更普适的情形，即

$$\Gamma(t+1,1)\neq\Gamma(t+1)+\left[\frac{1}{\mathrm{e}\pi}\right.$$
$$\left.\operatorname{arccot}\left(\tan\left(\pi(\mathrm{e}-1)\Gamma(t+1)\right)\right)-\frac{1}{2\mathrm{e}}\right],\quad t\in\mathbf{R}^+。$$

但当 t 足够大时，即便 $t\notin\mathbf{N}^+$，也有 $\Gamma(t+1,1)\sim\Gamma(t+1)$。这是因为

$$\lim_{t\to+\infty}\left(\Gamma(t+1,1)-\Gamma(t+1)\right)$$
$$=\lim_{t\to+\infty}\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^t\mathrm{d}x=\int_0^1\lim_{t\to+\infty}\mathrm{e}^{-x}x^t\mathrm{d}x=0$$

(极限与积分号可交换是因为 $\mathrm{e}^{-x}x^t$ 作为 x 的函数在 $[0,1]$ 上始终连续，并且取 $t\to+\infty$ 得到的极限函数也在 $[0,1]$ 上连续)。

推论 4 对任意 $n\in\mathbf{N}^+$ ，有

$$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=\frac{1}{2\mathrm{e}}-\frac{1}{\mathrm{e}\pi}\operatorname{arccot}(\tan(\pi(\mathrm{e}-1)n!))。$$

证 根据**推论 3** 的注记直接获得，或者由**推论 3** 所给结论，$\int_0^1\mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=\Gamma(n+1)-\Gamma(n+1,1)=$

$n!-\dfrac{\lfloor (\mathrm{e}-1)n!\rfloor+n!}{\mathrm{e}}=\dfrac{(\mathrm{e}-1)n!-\lfloor (\mathrm{e}-1)n!\rfloor}{\mathrm{e}}$，然后利用**引理 1**即得。

由于 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x=0$，因此根据**推论 4**，有

$$\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}(\tan(\pi(\mathrm{e}-1)n!))=\frac{\pi}{2}，\quad (*)$$

但是对于一般的情形，极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\operatorname{arccot}(\tan(\pi(\mathrm{e}-1)x))$ 并不存在。通过实际的计算，发现极限 $\lim\limits_{n\to\infty}\int_0^1 \mathrm{e}^{-x}x^n\mathrm{d}x$ 的收敛缓慢，当 n 取值到 50 时，积分值也只是取到 $0.0073547\cdots$，由此可见 $\operatorname{arccot}(\tan(\pi(\mathrm{e}-1)n!))$ 的收敛速度也缓慢。注意 $(*)$ 也可以利用三角函数的诱导公式如下给出:

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}(\tan(\pi(\mathrm{e}-1)n!))\\
&=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}(\tan(\pi \mathrm{e}n!))\\
&=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}(\tan(\pi(\mathrm{e}n!-\lfloor \mathrm{e}n!\rfloor)))\\
&=\lim_{n\to\infty}\operatorname{arccot}(\cot(\frac{\pi}{2}-\pi(\mathrm{e}n!-\lfloor \mathrm{e}n!\rfloor)))\\
&=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{2}-\pi(\mathrm{e}n!-\lfloor \mathrm{e}n!\rfloor)=\frac{\pi}{2}。
\end{aligned}$$

其中，上式的第二行使用了 $x-\lfloor x\rfloor\in[0,1)$ 这一事实。

致谢

本文由国家自然科学基金青年项目（12401042），贵州省科技厅科学计划项目（黔科合基础-ZK[2024]YiBan066），贵州大学引进人才科研启动基金项目（贵大人基合字（2022）53 号，（2022）65 号），贵州大学高等教育研究项目(申请号 703217243301) 资助。

参考文献

[1] Davis, P.J. (1959) Leonhard Euler's Integral: Leonhard Euler's integral: A historical profile of the gamma function: In memoriam: Milton abramowitz [J]. The American Mathematical Monthly, 66, 849–869.

[2] Remmert, R. (2006) Classical Topics in Complex Function Theory (Translated by Kay) [M]. Springer.

[3] Olver, F.W.J., Lozier, D.M., Boisvert, R.F., Clark,C.W. (2010) Handbook of Mathematical Functions [M] // Askey, R.A., Roy, R. Series Expansions. Cambridge University Press.

[4] Sonine. N. (1880) Recherches sur les fonctions cylindriques et le développement des fonctions continues en séries [J]. Mathematische Annalen. 16, 1-80.

[5] 王锦瑞. 一个与 Guass 取整函数相关的数论函数方程研究[J]. 长春大学学报, 2013, 23, 698-700.

[6] 王锦瑞. 一个数论函数方程 *xy*-[*x*]*y*=*y* [J]. 北华大学学报(自然科学版), 2013, 14, 262-263.

[7] 张晏志，郑穗生. 带有高斯取整函数的两个非线性三项递推关系的周期性[J]. 延边大学学报(自然科学版), 2014, 40, 1-7.