Global Science Publishing

潘氏版等三个版本中的切比雪夫不等式的证明中均存在一个相同的严重错误

梁自温

洞口县竹市镇卫生院，邵阳市，湖南省，中国

DOI:10.62836/math.v3i1.1136

摘要：切比雪夫不等式是数论中一个有名而又难证的不等式，由它可推出函数有界及的界值等问题，但潘氏等三个版本中均无命题——若a,c>0，c≠1.K∈$\overline{Z}^{-}$false，b<，则$k=\left[\frac{\log_c b}{\log_c a}\right]$——从而犯下了一个共同的致命性错误，故应予以纠正。

关键词：二重数学归纳法；切比雪夫不等式

A Serious Error Common to the Proofs of Chebyshev's Inequality in Three Versions, Including Pan's Version

Liang Ziwen

Zhushi Town Health Center, Dongkou County, Shaoyang City, Hunan Province, China

Abstract: Chebyshev's inequality is a well-known yet challenging inequality in number theory. It can be used to derive problems such as the boundedness of the function π(x)/(x/ln(x)) and the bounds of Pn. However, in the three versions, including Pan's version, there is no proposition stating that if a,c>0 c≠1, k∈$\overline{Z}^{-}$false, and ak≤b<ak+1, then $k=\left[\frac{\log_c b}{\log_c a}\right]$. This omission leads to a common fatal error, which should be corrected.

Keywords: Double mathematical induction; Chebyshev's inequality

由于现行多个版本如北京大学出版社（2020年8月第12次印刷，其上有潘承洞、潘承彪的切比雪夫不等式的证明）和高等教育出版社（2003年5月第2次印刷，其上有柯召、孙琦的切比雪夫不等式的证明），又如高等教育出版社（2004年2月第3次印刷，其上有闵嗣鹤、严仕健的切比雪夫不等式的证明）均存在相同的严重错误，故用双重数学规纳法证明了一个重要结论，不能不说为今后更深一步研究素数定理及第n个素数的介值问题指出了又一途径[1-3]。

引理1　若a,c>0，c≠1，K∈$\overline{Z}$ false，b，则$k=[\log_c b/\log_c a]$。

证 略

引理2　若k,m∈,m≥2,素数p≤2，||2m,则$p^{\sum_{j=1}^{k}[2m/p^j]}<(2m)^{\pi(2m)}$

证先设为p_1，p_2，…pn不大于2m的由小至大的全体素数，并用二重数学归纳法证明。

现令N(m，n)表命题，则N(2，1)成立，现设小于或等于2m的偶数4，6，8，...，2m都使命题成立，于是若2m+1为合数，N(m，n)自然成立，若2m+1为素数p'，p'得<2(m+1)，那么命题也成立。再设素数p_i(1≤i≤n)使命题成立，那么只要证明素

数p_{n+1}使命题成立即可。由于p_{n+1}或为2m+1，或为2m+3，...，或为2m+t，则命题成立。综上得证。

切比雪夫不等式的证明。即证明下面定理。

定理 若$x\geqslant2$，则$\left(\frac{\ln2}{3}\right)\frac{x}{\ln x}<\pi(x)<(6\ln2)\frac{x}{\ln x}$

证 设正整数$m\geqslant2$，并令$M=\frac{(2m)!}{(m!)2}$，则$M\in z^{+}$，且

$$\ln M=\ln(2m)!-2\ln m!=\ln\prod_{p\leqslant2m}p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|m}^{k}[2m/p^{j}]}-2\ln\prod_{p\leqslant m}p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|2m}^{k}[2m/p^{j}]}=\sum_{p\leqslant2m}p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|2m}^{k}[2m/p^{j}]}-2\sum_{p\leqslant m}p^{\sum\limits_{j=1,p\|m}^{k'}[2m/p^{j}]}=\sum_{j=1,p\leqslant m,p^k\|2m}^{k}\ln p^{[2m/p^{j}]}+\sum_{j=1,p\leqslant2m,p^k\|2m}^{k}\ln p^{[2m/p^{j}]}-2\sum_{p\leqslant m}\ln p^{\sum\limits_{j=1,p^{k'}\|m}^{k'}[2m/p^{j}]}=\sum_{p\leqslant m}\ln p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|2m}^{k}[2m/p^{j}]/}p^{\sum\limits_{j=1,p^{k'}\|2m}^{k'}[m/p^{j}]}+\sum_{j=1,m<p\leqslant2m,p^k\|2m}\ln p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|m}^{k}[2m/p^{j}]} \tag{1}$$

由于上式等号右边的第一项大于零，于是由(1)式得$\sum\limits_{m<p\leqslant2m}\ln p\leqslant\sum\limits_{j=1,m<p\leqslant m,p^k\|2m}\ln p^{[2m/p^{j}]}<\ln M$ (2)

由于$\sum\limits_{m<p\leqslant2m}\ln p>(\pi(2m)-\pi(m))\ln m$于是由(2)式可得$(\pi(2m)-\pi(m))\ln m<\ln M$ (3)

很明显，由(1)式可得，$\ln M<\ln(2m)!=\ln\prod\limits_{p\leqslant2m}p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|2m}^{k}[2m/p^{j}]}=\sum\limits_{p\leqslant2m}p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|2m}^{k}[2m/p^{j}]}$，由于据引理2可$p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|2m}^{k}[2m/p^{j}]}<(2m)^{\pi(2m)}$，那么得$\ln p^{\sum\limits_{j=1,p^k\|2m}^{k}[2m/p^{j}]}<\pi(2m)\ln(2m)=\ln(2m)^{\pi(2m)}$，于是由(3)式得$(\pi(2m)-\pi(m))\ln m<\ln M<\pi(2m)\ln(2m)$ (4)

由于$M\geqslant2^{m}$，即得$\ln M\geqslant m\ln2$ (5)

由于$M<2^{m}$，即得$\ln M<2m\ln2$ (6)

于是由(4),(5)式可得$\ln(2m)>m\ln2$ (7)

由(4),(6)式可得$(\pi(2m)-\pi(m))\ln m<2m\ln2$ (8)

因为$x\geqslant6$时，取$m=[\frac{x}{2}]>2$，就有$2m\leqslant x<3m$，于是由(7)式得$\pi(x)\ln x\geqslant\pi(2m)\ln(2m)>m\ln2>\frac{\ln2}{3}x$ (9)

由上即得$\pi(x)>(\frac{\ln2}{3})\frac{x}{\ln x}$

又因为可证当$2\leqslant X<6$时(9)式也成立，那么就证明了$X\geqslant2$时，$(\frac{\ln2}{3})\frac{x}{\ln x}<\pi(x)$ (10)

很明显，当$m=2^{k}$时可得$\ln m=k\ln2$，那么由(8)式可得$k(\pi(2k+1)-\pi(2^{k}))<2^{k+1}$ (11)

很明显$k\epsilon N$时，$\pi(2^{k+1})\leqslant2^{k}$ (12)

用(11)+(12)得$(k+1)\pi(2^{k+1})-k\pi(2^{k})<3\cdot2^{k}$ (13)

那么k=0时，由(13)式得$\pi(2^{1})-0<3\cdot2^{0}$

那么k=1时，由(13)式得$2\pi(2^{2})-\pi(2^{1})<3\cdot2^{1}$

那么k=2时，由(13)式得$3\pi(2^{3})-2\pi(2^{2})<3\cdot2^{2}$

....

$k=t-1$时，由(13)式得$t\pi(2^{t})-(t-1)\pi(2^{t-1})<3\cdot2^{t-1}$

将上面不等式的左右两边相加得到$t\pi(2^{t})<3\cdot2^{t}$ (14)

因为$x\geqslant2$时必有唯一正整数h使得$2^{h-1}<x\leqslant2^{h}$ (15)

因而由(14)，(15)两式得$\pi(x)\leqslant\pi(2^{h})<3\cdot\frac{2h}{h}<6\ln2\frac{x}{\ln x}$

综上定理得证

推论1.若p_n表第n个素数，则$(\frac{1}{6\ln2})n\ln n<p_n<\frac{3}{\ln3}n\ln n$。

证因为当p_n表第n个素数时，$\pi(p_n)=n$，那么令$x=p_n$时即得推论。

推论2若p_n表第n个素数，则$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{p_n}{n\ln n}=0$。

证略

推论3若$x\geqslant2$，则$\frac{\pi(x)}{\frac{x}{\ln x}}$有界。

证略

注意：潘氏版（文献）中的错误即文献的P393中的③式及P394中的（6），（7）式错误（因为（6）式没有文中的引理1），最为重要的（8）式中的$\ln M\leqslant\pi$（2m)ln(2m)虽正确，但却没有给出证明（文献也同样），其必须用双重数学归纳法才能证。

致谢：文中外文部分全由编辑部无私帮助完成，特别致谢。

参考文献

[1] 潘承洞，潘承彪.初等数论(第三版）.北京大学出版社，2020年8月第12次印刷，P393~P395.

[2] 柯召，孙琦.数论讲义高等教育出版社，2003年5月第2次印刷，P80~P83.

[3] 闵嗣鹤，严仕健.初等数论(第三版）.高等教育出版社，2004年2月第3次印刷，P199~P203.