

线性代数中的可视化教学

赵东霞, 张乐, 姚林红
中北大学数学学院, 山西太原

摘要:线性代数课程具有抽象、知识点细碎、且环环相扣、错综复杂的特点, 教师如何设计教学过程是值得关注的一个重要课题. 本文致力于将线性代数中抽象的定义、定理、习题等进行可视化设计的探索, 符合新工科教学改革中提升应用性、提高课堂教学效果、调动学生学习兴趣、培养应用型人才的目的。

关键词: Matlab; 线性代数; 可视化; 教学设计

Visual Teaching in Linear Algebra

Dong-xia Zhao, Le Zhang, Lin-hong Yao

School of Mathematics, North University of China, Taiyuan, Shanxi

Abstract: The course of Linear Algebra has the characteristics of abstraction, fragmentary knowledge points, interlocking and complex. How to design the teaching process for teachers is an important issue worthy of attention. This paper is committed to the exploration of visual design of abstract definitions, theorems and exercises in linear algebra, which is in line with the purpose of improving application, improving classroom teaching effect, arousing students' interest in learning and cultivating applied talents in the new engineering teaching reform.

Keywords: Matlab; Linear Algebra; Visualization; Teaching Design

1 引言

线性代数课程的特点是公式多, 符号繁, 内容抽象, 知识点细碎, 记忆量大且容易混淆的地方多, 不同章节知识点间联系紧密: 既相互推导, 又前后印证。因此, 这是一门学的不好就显得特别难的科目[1]。由于工科生普遍具有形象思维发达、抽象能力和逻辑推理能力薄弱的点, 导致教师在教学中发现: 学生内心对这门课程比较排斥, 学习积极性不高[2], 尤其在教授部分知识点时甚至有种“对牛弹琴”、师生之间隔着一堵墙的无力感。那么, 如何提高学生的学习效率和能力, 提高学生学习的积极性是每个教师都值得思考和研究的问题, 其中借助现代多媒体辅助教学技术对课程进行灵活教学是一种切实可行的解决方案[3]。基于STEM教育理念, 以矩阵及矩阵计算为例且融合数学图像处理的基础技术设计线性代数可视化教学已有一些成

果[4]。文献[5]利用Matlab对方程组进行求解且画出了二元齐次非线性方程组的可视化图像。文献[6]中基于微课的翻转课堂这种教学模式极大地调动了学生学习线性代数的热情和积极性, 也取得了不错的教学效果。因此, 在线性代数的教学中运用数学软件以及实际生活背景直观化地进行教学是迫切需要探索的。基于此, 中北大学数学学院尝试改革线性代数传统教学方法, 进行教学的“可视化”探索与研究, 本文将可视化教学全面地应用在线性代数概念、定理、习题等的教学中。

所谓可视化教学旨在利用可视易懂的方式诠释基础知识, 利用丰富的图例展示各种抽象的数学概念、定理和证明思路, 形成能够直接作用于人的感官的知识外在表现形式, 促使教学效果达最优[7]。一图胜千言, 图是最直观的语言, 易读、易懂、且易记, 借助图像把看不见的思维过程呈现出来, 将

引导学生进入会学、乐学的良性循环[8]。知识可视化工具不仅包括概念图、流程关系图、表格、框图、思维导图，还有Mathematica、Matlab等数学软件图像功能，它可以直观地展示数学之美，加深学生对知识点的理解，同时培养学生的空间想象力，锻炼学生的动手能力，提高学生的学习主动性和积极性，增强课堂的趣味性，激发学生的探索欲，是达到《国家中长期教育改革和发展规划纲要》明确提出的“培养本领过硬的高素质专门人才和拔尖创新人才”的一种有效途径。

化抽象为直观，将知识点生动形象地展现在学生面前，MATLAB数学软件即为实现这一目标的强有力工具[9]。MATLAB是matrix与laboratory两个词的组合，意为矩阵工厂或矩阵实验室，软件主要面对科学计算、可视化以及交互式程序设计的高科技计算环境。以矩阵作为基本编程单元，提供了各种矩阵的运算，有较强的数据可视化功能[10]。因此，我们可以借助MATLAB的“可视化”效果使线性代数课程教学难度降低、教学内容变得鲜活生动，还可以通过一种直观语言的方式理解线性代数中的内容，使学生对线性代数的知识有一个更直观的体会，提高学习兴趣，达到融会贯通，全面把握知识点间的联系，灵活运用学习效果。

2 概念可视化

线性代数课程中概念多且非常的抽象，传统的教学方式就是教师直接讲解，学生们只能从代数的角度对概念有一个非常浅显的理解，按部就班地进行运算。如果我们能够借助Matlab中强大的可视化功能将数据可视化，有一个直观的展示，那么对线性代数知识的理解也就没有那么遥不可及了。

案例1 数形结合思想与正定二次型

传统教学在给出正定二次型的定义后，直接罗列了各种判定方法，虽然这些判定方法本身并不难，但学生常有的疑问是“为什么要定义正定二次型？有什么特殊的含义呢？”实际上，二次型即为二次齐次函数，对于二元二次型，和高等数学里面的二元函数是相通的，我们借助于MATLAB数学软件中ezmesh函数可将二元二次型的函数图像在三维空间直角坐标系中呈现出来，使同学们认识到二元正定二次型即为一位于xoy面上方的曲面（如图

1），如果二元二次型的函数图像既有位于xoy面上方的部分，也有位于xoy面下方的部分，那么一定不是正定二次型（如图2所示）。因此，MATLAB数学软件作为媒介，将数形结合思想应用在线性代数的教学中，使抽象定义可视化，极大地提高了教学效果，也给线性代数的课堂教学带来了生机和活力，使学生更容易理解和接受知识。

案例2 理解正交变换的几何意义

在线性代数中正交变换是线性变换的一种，它是从实内积空间V映射到V自身，且保持变换前后内积不变。在传统教学中教师讲解完正交变换的

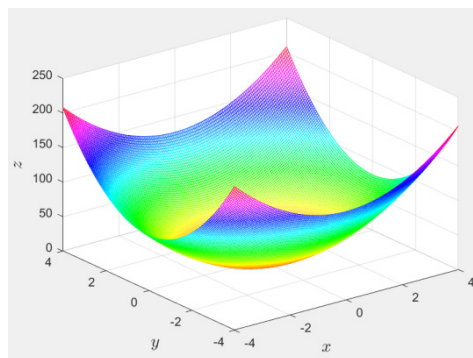


图1 正定二次型 $f(x, y) = 5x^2 + 8y^2$

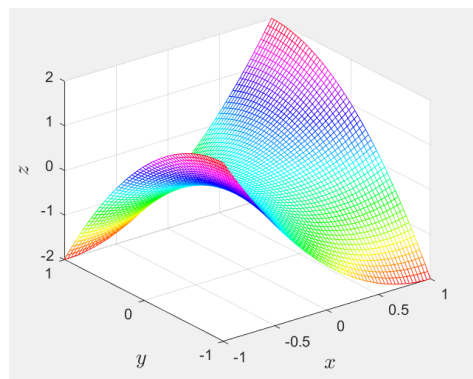


图2 非正定二次型 $g(x, y) = x^2 + 2xy - y^2$

定义后，给出了学生一系列正交变换所满足的性质，但学生常有的疑问是“正交变换是什么样子的呢？有什么几何意义呢？”如果我们用可视化的图形将所学的内容直观呈现出来，将形象思维和抽象思维结合起来，这符合学生们的认知规律，会取得不错的教学效果。以二次型 $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$ 为例，令 $f(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2 = 6$ ，在正交变换

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

下转化为 $f(y_1, y_2) = 2y_1^2 + 4y_2^2 = 6$. 如图3所示。由此还观察到二次型在正交变换的作用下几何图形的形状和大小保持不变，但进行了某一角度的旋转，这就是正交变换的几何意义。

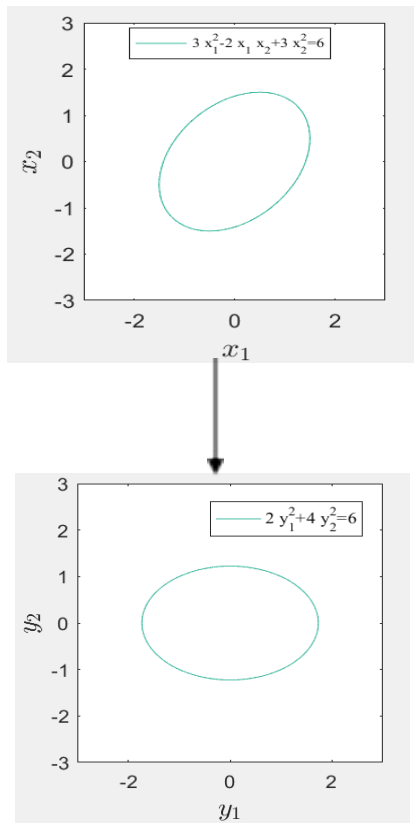


图3 正交变换

3 定理可视化

在线性代数的教学中，向量组的线性相关与线性无关既是重点，又是难点。此部分内容繁杂，定理结论众多，学生不容易理解，记忆也容易混淆，因此在教学时能够以通俗易懂、直观的方式授课来激发学生的学习兴趣就显得尤为重要。

定理1 若 n 维向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关，则在每一个向量的对应位置上添加 r 个分量所得到的 $n+r$ 维向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性无关。

以上定理在学习时，我们常常听到同学们直接记忆“原向量组无关，延长向量组无关”；但在记忆时很多学生压根不理解这句简短的话到底是什么意思，他们对于延长向量组的理解可能会存在一定的偏差。此处的延长是指向量的维数的增加，所谓向量的维数也就是指向量分量的个数增加，而不是向量个数整体的增加，如果是向量个数的增加时就

有定理：“部分相关，整体相关”。学生们在学习这两个定理时特别容易混淆，因此我们需要从根本上直观的来理解定理的含义，才能更好的掌握线性代数中繁多的定理。

根据定理的已知条件 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关，由线性无关的定义知：当且仅当 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ 时， $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$ 才成立，也就是说向量组中任何一个向量都不能由其余向量线性表示，所以向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关可以看作是 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中没有“余向量”，因此，由于前者的成立性，我们也可以看到当向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中的每个向量从 n 维增加到 $n+r$ 维得到的向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 中依然没有“余向量”，因此 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性无关。

推论1 若 n 维向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关，则在每一个向量的对应位置上去掉 r 个分量得到的 $n-r$ 维向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性相关。

由线性相关的定义知，向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性相关，则存在不全为0的数 $k_1, k_2, \dots, k_m$ 使得 $k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m = 0$ 。假设 $k_i \neq 0 (1 \leq i \leq m)$ ，则

$$a_i = -\frac{k_1}{k_i} a_1 - \frac{k_2}{k_i} a_2 - \dots - \frac{k_m}{k_i} a_m,$$

也就是说向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 至少有一个“余向量”，而当向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中的每个向量对应位置上去掉 r 个分量得到 $n-r$ 维向量组 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 时，由于前者的成立性，此时依然至少存在一个“余向量”，因此 $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_m$ 也线性相关。

定理2 若向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性无关，而向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m, \beta$ 线性相关，则 β 必由 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示，且表达式唯一。

向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m, \beta$ 线性相关，则存在不全为0的数 $k_1, k_2, \dots, k_m, k$ 使得

$$k_1 a_1 + k_2 a_2 + \dots + k_m a_m + k \beta = 0,$$

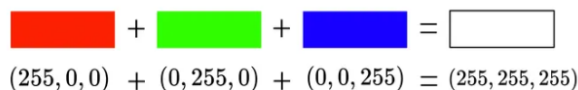
也就是说向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m, \beta$ 至少有一个“余向量”，又由向量组 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 是线性无关的可知 $k_1 = k_2 = \dots = k_m = 0$ ，因此 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 中没有“余向量”，此时“余向量”必定为 β ，故 $k \neq 0$ ，有

$$\beta = -\frac{k_1}{k} a_1 - \frac{k_2}{k} a_2 - \dots - \frac{k_m}{k} a_m,$$

即 β 必由 $a_1, a_2, \dots, a_m$ 线性表示，而唯一性通

过作差法可以让同学们很直观的理解。

从数学的角度来理解线性相关性,虽然我们引入了“余向量”的解释方式,但很多同学依然觉得抽象且不实用,最让学生们心服口服的就是他们能真切感受到它的存在。其实,在我们的实际生活中也有很多“线性相关性”的实例。例如,工科5个班级分别去不同的景点进行夏令营活动,5个班级所去的地方用5个 n 维向量表示,那么这5个 n 维向量是线性无关的,而某理科班的班长看到工科1班的同学在抖音平台发布的记录夏令营活动的短视频特别有趣,决定去工科1班去的景点进行相同的夏令营活动。此时,该理科班所对应的 n 维向量和工科1班所对应的向量就是线性相关的。再比如,众所周知,颜料三原色为红黄蓝,其他颜色都可以由他们按比例调配出来,因此,红黄蓝白四种颜色就是线性相关的,白色就是多余的向量(如图4所示)。在这些通俗易懂的实际生活例子中,学生们再去理解向量组的线性相关性这部分内容就容易很多,也激发了学生的学习兴趣,进而提升了教学效果。



$$(255, 0, 0) + (0, 255, 0) + (0, 0, 255) = (255, 255, 255)$$

图4 红绿蓝白是线性相关的向量组

4 习题可视化

传统的线性代数课后习题中有各种各样的计算题,例如:行列式的计算,解线性方程组,求矩阵的特征值和特征向量以及二次型化标准形等等。学生们在手写课后习题时对于一些低阶、变量较少的习题来说,计算起来还较为容易一些,而在实际中往往是一些高阶的计算,看到繁杂的计算容易出现心里排斥,因此我们要借助已有的Matlab, Maple等数学软件来完成习题,这不仅可以提高做题的效率,培养学生们学习数学的兴趣,同时由于这些数学软件有着极其强大的可视化功能,也让学生们能够非常直观、清晰的体会习题的含义。

案例3 求解非齐次线性方程组

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 - x_3 = -2, \\ 2x_1 - 3x_2 - x_3 = 2, \\ -2x_1 - 0.7x_2 - x_3 = -2. \end{cases} \quad (1)$$

求解该线性方程组时,由于方程的个数等于未知量的个数,且系数行列式不等于0,学生们传统的手算方法可以采用克拉默法则进行计算,但在计算过程中要求计算四个三阶行列式的值。如果方程组包含四个方程四个未知量,则需要计算五个四阶行列式的值,计算量太大,且容易出现差错。机械性地简单重复计算只会磨损掉学生的学习兴趣。Matlab软件具有强大的计算、绘图等功能,因此,可以借助Matlab数学软件来求解方程组。对于方程组(1),根据已有的克拉默法则程序语言,在命令行窗口输入:

```
>> a=[2,4,-1;2,-3,-1;-2,-0.7,-1];
```

```
>> b=[-2,2,-2];
```

```
>> kramer(a,b)
```

结果为: 0.67143 -0.57143 1.0571

直接可以得到非齐次线性方程组(1)有唯一解,且求得解为(0.67143, -0.5714, 1.0571)。从几何意义的角度来看,(1)中的每个方程对应空间直角坐标系中的一张平面,利用Matlab三维图形绘制语句画出图形(如图4所示),新建.m文件内容如下:

```
clear all
close all
[x_1,x_2]=meshgrid(-4:0.1:4);
x_3=2*x_1+4*x_2+2;
surf(x_1,x_2,x_3);
colormap cool
hold on; %保持图形
[x_1,x_2]=meshgrid(-4:0.1:4);
x_3=2*x_1-3*x_2-2;
surf(x_1,x_2,x_3);
colormap summer
hold on; %保持图形
[x_1,x_2]=meshgrid(-4:0.1:4);
x_3=-2*x_1-0.7*x_2+2;
surf(x_1,x_2,x_3);
colormap winter
xlabel(' $x_1$ ', ' interpreter' , ' latex' , ' FontSize' ,14),
ylabel(' $x_2$ ', ' interpreter' , ' latex' , ' FontSize' ,14),
zlabel(' $x_3$ ', ' interpreter' , ' latex' , ' FontSize' ,14),
```


ntSize',14)。

从图5可以看出，非齐次线性方程组(1)有唯一解意味着图中的三个平面有且仅有一个交点。对于方程组

$$\begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 3, \\ x_2 + x_3 = 2, \\ x_1 - x_2 + 2x_3 = 7 \end{cases} \quad (2)$$

和

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + 2x_3 = -2, \\ 3x_1 + 9x_2 + 6x_3 = -6, \\ -x_1 - 3x_2 - 2x_3 = 2. \end{cases} \quad (3)$$

图6和图7反映的是线性方程组(2)无解和线性方程组(3)有无穷多组解的情形。

通过Matlab软件强大的可视化功能，让学生们更加直观的理解线性代数习题的知识点，并且遇到习题中一些高阶的复杂计算时，依然可以采用以上的方法，消除了学生们的畏惧心理，增强学习线性代数的积极性。

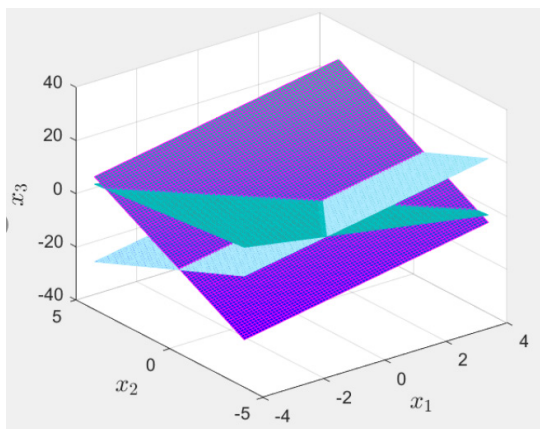


图5 线性方程组(1)有唯一解

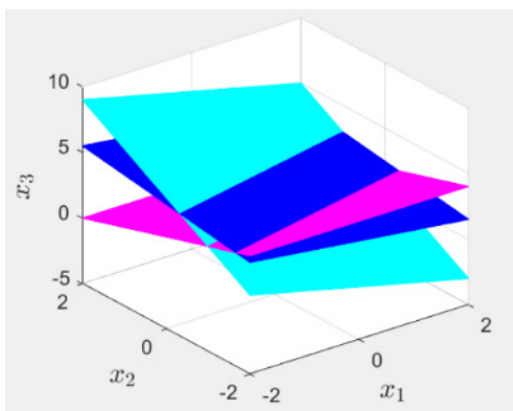


图6 线性方程组(2)无解

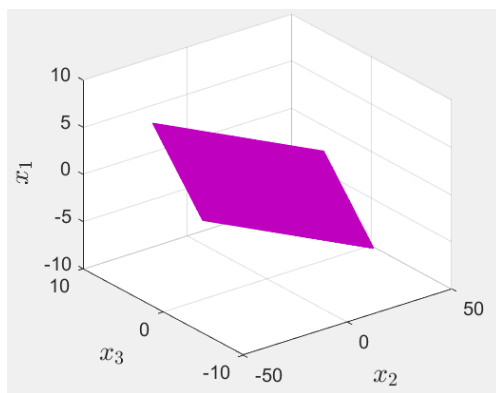


图7 线性方程组(3)有无穷多组解

5 结论

线性代数是各大高校理、工、文、经、管等本科相关专业大学生的一门综合必修数学基础理论课，该课程是从具体概念抽象出来的公理化方法、严格的逻辑推证、巧妙的归纳综合，体现了几何观念与代数方法之间的联系，是数形结合思想的完美呈现，对于强化数学训练、培养数学思维、增强创新能力是非常有用的。本文将可视化教学全面地应用在线性代数概念、定理、习题等教学中，旨在帮助学生直观理解和掌握核心知识，激发学生的学习兴趣 and 积极性。

致谢

本文由山西省高等学校教学改革创新项目(项目编号: J20240885) 资助。

参考文献

- [1] 李尚志. 线性代数教学改革漫谈[J]. 教育与现代化, 2004(1): 30-33.
- [2] 姚琼, 高东娟. 面向独立学院学生的线性代数课程“可视化”教学研究[J]. 大学数学, 2013, 29(1): 6-10.
- [3] 寇娜. MATLAB在线性代数理论教学中应用的探索[J]. 教育教学论坛, 2020, 29, 306-307.
- [4] 王晓明, 朱一心. 基于STEM教育理念的线性代数可视化教学实践[J]. 首都师范大学学报(自然科学版), 2020, 41(1): 62-66.
- [5] 王荣亮, 仓龙仓等. 基于MATLAB的线性方程组求解及其可视化[J]. 电脑知识与技术, 2021, 17(31): 150-152.
- [6] 李静. 基于微课的翻转课堂教学模式在线性代数教学中的应用研[J]. 科技资讯, 2020, 18(13): 148+150.

- [7] 李清华, 王宝娟. 线性代数知识点的可视化教学设计探索与实践[J]. 大学数学, 2022, 38(2):112-119.
- [8] 姚静. 线性代数课程可视化交互式教学的探索[J]. 中国多媒体与网络教学学报(上旬刊), 2020(09):244-246.
- [9] 朱佳俊, 李吉有, 张跃辉. 编程实践融入线性代数教学的探索[J]. 实验室研究与探索, 2019(11):231-234.
- [10] 刘慧敏, 程建辉. 线性代数的“可视化”教学[J]. 河南工程学院学报(自然科学版), 2014, 26(4):78-80.

