教育学刊
Journal of Education Research

Global Science Publishing

微分中值问题中Rolle辅助函数的构造

刘露萍[1]，刘雨喆[2]
1. 贵州商学院计算机与信息工程学院，贵州贵阳；
2. 贵州大学数学与统计学院，贵州贵阳

摘要：微分中值定理是函数与导数之间沟通的桥梁，它不仅是微分学中非常重要的基本定理，而且在积分学、级数理论、数学分析等后续课程中也是研究的重要辅助手段，发挥着重要的作用。本文讨论了Rolle中值定理、Lagrange中值定理Cauchy中值定理的等价性条件，同时作为一个应用，本文给出了高阶微分中值问题中构造满足Rolle中值定理使用条件的辅助函数的构造方法。

关键词：微积分；微分中值定理；辅助函数的构造

On the Construction of Rolle Auxiliary Functions in Mean Value Problems

Luping Liu [1], Yuzhe Liu [2,*]
1. Computer and Information Engineering College, Guizhou University of Commerce, Guiyang, Guizhou;
2. School of Mathematics and Statistic, Guizhou University, Guiyang, Guizhou

Abstract: The mean value theorem of differential is a bridge between functions and derivatives. It is not only a fundamental theorem in differential calculus, but also an important auxiliary tool for research in subsequent courses such as integration, series theory, and mathematical analysis, playing an important role. This paper discusses the equivalence of Rolle's Mean Value Theorem, Lagrange's Mean Value Theorem, and Cauchy's Mean Value Theorem. And, as an application, we provides a method in an example to structure a function which satisfies the conditions of Rolle's Mean Value Theorem such that this function can be used to consider high-order mean value of differential.

Keywords: Calculus; Mean Value Theorem of Differential; Structuring Auxiliary Function

1 引言

经典的分析理论是本科数学系的学生必修的科目之一，且在应用数学、数学建模、以及基础数学理论中具有重要指导作用。用数学分析的理论来解决中等数学以及高等数学问题，可以避开复杂的运算，并清晰逻辑思路，使得解决问题的手段更具备方法性和可延展性，例如文献[1–7]。这其中，微分中值定理（本文特指 Rolle 中值定理、Lagrange 中值定理、以及 Cauchy 中值定理）是应用十分广泛的定理，它们在函数分析方法应用中作用尤为显著。

由于微分中值定理之间的等价性，所有单中值问题最终都可以归结为 Rolle 中值定理的应用，而这类问题的解决关键在于其相应的辅助函数的构造，但是辅助函数的构造并非易事， 对于一阶中值问题的辅助函数构造比较常见方法有以下几种：凑原函数法[8]、常数变易发[9]、微分方程、等常数值和几何图形[10]、积分构造法[11]、通过微分方程的解去构造出辅助函数的万能方法[12]等。近年来，一些数学工作者给出了一类二阶中值问题辅助函数构造的通用思路和方法，例如[13]。他们将原本复杂的二阶中值问题转化为简单的求解微分方程问题。然而，目前对于二阶以上的中值问题（即需要使用两次以上微分中值定理来处理的问题）却没有比较通用的方法。本文考虑积分方程通解的思路，给出一类二阶中值问题辅助函数构造的通用方法。通过

例子说明中值 Rolle 辅助函数的构造，并阐述了辅助函数的构造方式及其推导过程，分析了微分中值定理在大学数学解题中的应用技巧，这有助于学生更好地理解并应用微分中值定理。

2 微分中值定理的等价性

本文所指的微分中值定理指的是 Rolle 中值定理，Lagrange 中值定理，和 Cauchy 中值定理，参考[14]和[15]，其中 Rolle 中值定理的证明是通过下述引理得到的。

为了方便读者，本文将上述三个中值定理陈列如下:

定理 1 (Rolle 中值定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且$f(a)=f(b)$，则至少存在一点ξ，使得$f'(\xi)=0$.

Rolle 中值定理的几何意义是: 在曲线弧 AB 上存在有一点ξ，使曲线在该点ξ处的切线是水平的，如图 1 所示。

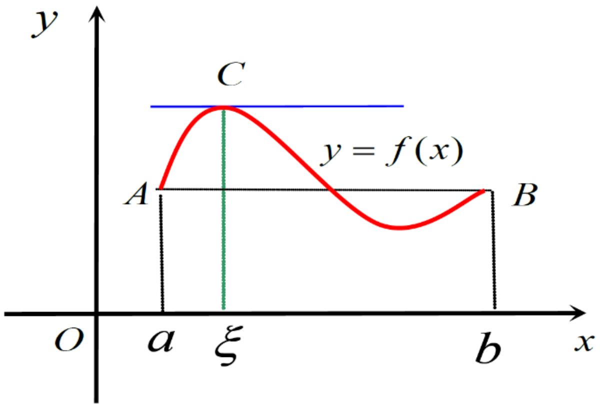

图 1. Rolle 中值定理的几何解释

定理 2 (Lagrange 中值定理) 设函数$f(x)$在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$f'(\xi)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

Lagrange 中值定理的几何意义是: 若连续的曲线$y=f(x)$的弧 AB 上除端点外处处具有不垂直于轴的切线，那么这弧上至少有一点ξ，使曲线在该点ξ处的切线平行于弦 AB，如图 2 所示.

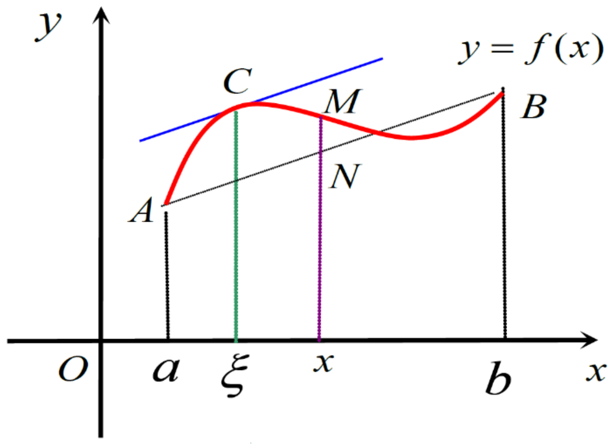

图 2. Lagrange 中值定理的几何解释

定理 3 (Cauchy 中值定理) 设函数$f(x)$和$g(x)$都在闭区间$[a,b]$上连续，在开区间(a,b)上可导，且对于任意$x\in(a,b)$，$g'(x)\neq 0$. 则至少存在一点$\xi\in(a,b)$，使得

$$\frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}=\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Cauchy 中值定理的几何意义是: 在曲线弧 AB 上至少有一点$(f(\xi),g(\xi))$，使曲线在该点$(f(\xi),g(\xi))$处的切线平行于弦 AB，如图 3 所示.

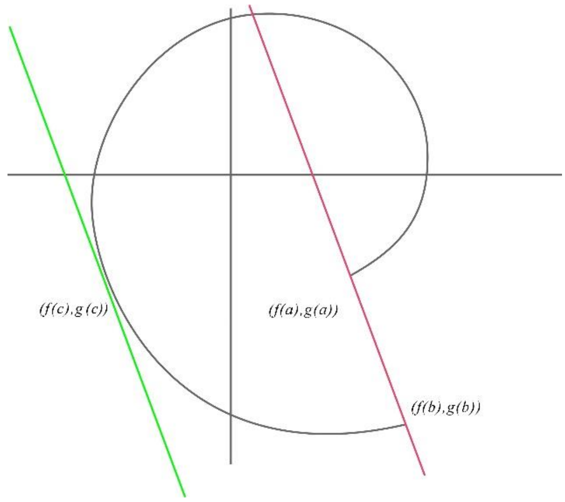

图 3. Cauchy 中值定理的几何解释

下面定理是众所周知的，但是为了方便读者我们仍然为它写一个证明.

定理 4 定理 1，定理 2，和定理 3 所给的三个微分中值定理等价.

证. 定理 1⇒定理 2 (参考[14]): 构造辅助函数

$$F(x) = f(x) - f(a) - \frac{f(b) - f(a)}{b - a}(x - a), \quad x \in [a, b],$$

显然, $F(x)$在闭区间$[a,b]$上满足 Rolle 定理 (见定理 1) 的适用条件，所以至少存在一点$\xi \in (a, b)$，使得$F'(\xi) = f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{b - a} = 0$，于是有

$$f'(\xi) = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}.$$

定理 2 $\Rightarrow$ **定理 3**: 构造辅助函数$H(x) = f(x) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(x)$，并在区间$[a, b]$上对其使用 Lagrange 中值定理 (即**定理 2**)，可知存在$a < \xi < b$使得:

$$\frac{H(a) - H(b)}{a - b} = H'(\xi).$$

注意到:

(1) 上式左侧 $= \dfrac{1}{a-b}\left(\left(f(a) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(a)\right) - \left(f(b) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g(b)\right)\right)$
$= \dfrac{1}{a - b}\left((f(a) - f(b)) + \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}(g(b) - g(a))\right) = 0$;

(2) 上式右侧$f'(\xi) - \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}g'(\xi)$.

所以，$\dfrac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \dfrac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)}$，即得 Cauchy 中值定理 (即**定理 3**).

定理 3$\Rightarrow$**定理 1**: 取$f(x)$是定义在区间$[a, b]$上满足$f(a) = f(b)$的可导函数，并取$g(x) = x$. 则由 Cauchy 中值定理，存在$a < \xi < b$使得

$$f'(\xi) = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)} = \frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = 0$$

成立，这就得到了 Rolle 中值定理 (即**定理 1**).

3 中值问题中 Rolle 辅助函数的构造

文章的这一节将通过算例来给出中值问题中，如何构造适用 Rolle 中值定理适用条件的辅助函数。

例. 已知函数$f : [a, b] \to \mathbb{R}$二阶可导，且$f(a) = f(b) = 0$. 证明: 存在$a < \xi < b$，使得:

$$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{f''(\xi)}{12}(a - b)^3$$

下面本文只用罗尔定理来证明上述结论，为此我们先进行一些分析。

解析. 即证明函数

$$\frac{12}{(a - b)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f''(x)$$

有零点. 因此，根据 Rolle 中值定理，即需要考虑函数

$$\phi(x) = \frac{12x + C}{(a - b)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f'(x)$$

在区间$[a, b]$上是否有至少两个零点η_1, η_2 $(a < \eta_1 < \eta_2 < b)$. 进一步地，则要考虑

$$\varphi(x) = \frac{6x^2 + Cx + D}{(a - b)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f(x)$$

的零点. 注意到

$$\varphi(a) = \frac{6a^2 + Ca + D}{(a - b)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

$$\varphi(b) = \frac{6b^2 + Cb + D}{(a - b)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

为了使 Rolle 中值定理的条件被适用，希望$\varphi(x)$满足$\varphi(a) = \varphi(b)$，等价地，即希望它满足$6a^2 + Ca = 6b^2 + Cb$，进而得

$$C = -\frac{6(a^2 - b^2)}{a - b} = -6(a + b)$$

由此可知满足$\varphi(a) = \varphi(b)$的$\varphi(x)$为:

$$\varphi(x) = \frac{6x^2 - 6(a + b)x + D}{(a - b)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f(x)$$

同时，我们还需要$\varphi(x)$在(a, b)上存在至少一个零点$\eta \in (a, b)$来保证其导数$\varphi'(x) = \phi(x)$有两个零点，因此还需考虑函数

$$F(x) = \frac{3x^3 - 3(a + b)x^2 + Dx + E}{(a - b)^3}\int_a^b f(x)\mathrm{d}x - \int_a^x f(x)\mathrm{d}x$$

并使之在$[a, b]$上满足 Rolle 定理适用条件. 于是，解$F(a) = F(b)$，则得$D = 6ab$，E可以是任意常数. 满足此条件的上述函数$F(x)$就是我们要构造的辅助函数.

证. 构造辅助函数

$$F(x) = \frac{2x^3 - 3(a + b)x^2 + 6abx}{(a - b)^3}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - \int_a^x f(t)\mathrm{d}t$$

则有:

$$F(a) - F(b) = \left(\frac{2a^3 - 3(a + b)a^2 + 6a^2b}{(a - b)^3}\right.$$

$$\left. - \frac{2b^3 - 3(a + b)b^2 + 6ab^2}{(a - b)^3} + 1\right)\int_a^b f(t)\mathrm{d}t = 0,$$

因此，$F(x)$适用 Rolle 中值定理条件. 所以，存在$a < \eta < b$使得$F'(\eta) = 0$，即:

$$F'(\eta) = \frac{6\eta^2 - 6(a + b)\eta + 6ab}{(a - b)^3}\int_a^b f(t)\mathrm{d}t - f(\eta)$$

再者，对$F'(x)$而言，容易验证有$F'(a) = F'(b) = 0$. 所以，$F'(x)$分别在(a, η)和

(η, b)上适用 Rolle 中值定理的条件，从而存在$a < \eta_1 < \eta < \eta_2 < b$使得

$$\begin{aligned} F''(\eta_1) &= \frac{12\eta_1 - 6(a+b)}{(a-b)^3} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f'(\eta_1) \\ = F''(\eta_2) &= \frac{12\eta_2 - 6(a+b)}{(a-b)^3} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f'(\eta_2) \\ = 0 \end{aligned}$$

最后，再在区间(η_1, η_2)上适用 Rolle 定理，得知存在$a < \eta_1 < \xi < \eta_2 < b$使得

$$\frac{12}{(a-b)^3} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x - f''(\xi) = 0$$

这已经容易转化为所要证明的形式.

另外，该题亦可构造如下的辅助函数，借助 Cauchy 中值定理给出证明。类似地，我们先进行一些分析.

解析. 易见在$f''(x)$连续的情形下，使用恒等式:

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x = 2\int_a^b f(x)\mathrm{d}x$$

并考虑第一积分中值定理(这里$(x-a)(x-b)$在积分区间上不变号):

$$\int_a^b (x-a)(x-b)f''(x)\mathrm{d}x = f''(\xi)\int_a^b (x-a)(x-b)\mathrm{d}x$$

这个方法证明的其实是给定命题的一个弱命题: 限定了$f''(x)$的连续性，虽然最终推出了$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| \le \frac{M}{12}(b-a)^3$. 但是这个思路给我们以下启示.

似乎可以考虑尝试对方程$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = \frac{f''(t)}{12}(b-a)^3$有关于$t$的解进行证明，下面将考虑中值定理. 一般地，习惯上会优先考虑$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^3} = \frac{f''(t)}{12}$，这因为它易被观察出:

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x)\mathrm{d}x &= \left(\int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x\right)_{\chi=b} - \left(\int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x\right)_{\chi=a} \\ (b-a)^3 &= \left((\chi-a)^3\right)_{\chi=b} - \left((\chi-a)^3\right)_{\chi=a}, \end{aligned}$$

这里,

$$\left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\chi^m}(\chi-a)^3\right]_{x=b} = \left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\chi^m}(\chi-a)^3\right]_{x=b} - \left[\frac{\mathrm{d}^m}{\mathrm{d}\chi^m}(\chi-a)^3\right]_{x=a};$$

而

$$\left(\int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x\right)' = f(\chi),\ \left(\int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x\right)'' = f'(\chi),\ \left(\int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x\right)''' = f''(\chi),$$

所以$\int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x$的部分，我们希望增加一个余项$R(\chi)$使$\int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x + R(\chi)$——这里令之为$G(\chi)$，而$(\chi-a)^3$则令之为$H(\chi)$——$G(\chi)$和$H(\chi)$满足:

$$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^3} = \frac{G(b)-G(a)}{H(b)-H(a)} = \frac{G'(\xi_1)}{H'(\xi_1)} = \frac{f(\xi_1)+R'(\xi_1)}{3(\xi_1-a)^2}$$

同时希望:

$$\begin{aligned} f(\xi_1)+R'(\xi_1) &= f(\xi_1)+R'(\xi_1)-(f(a)+R'(a)),\ f(a)+R'(a)=0 \\ &= f'(\xi_2)+R(\xi_2'') = \frac{1}{2}f''(\xi_2)(\xi_2-a), \end{aligned}$$

也即有

$$f'(\chi)+R''(\chi) = -\frac{1}{2}f''(\chi)(\chi-a),$$

这样对$\frac{f(\xi_1)+R'(\xi_1)}{3(\xi_1-a)^2}$再次使用 Cauchy 中值定理得,

$$\frac{f(\xi_1)+R'(\xi_1)}{3(\xi_1-a)^2} = \frac{\frac{1}{2}f''(\xi_2)(\xi_2-a)}{6(\xi_2-a)} = -\frac{f''(\xi_2)}{12},$$

从而有$\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^3} = -\frac{f''(\xi_2)}{12}$，证明结束. 因此，我们只需要求出满足上述条件的$R(\chi)$.

所以，依次计算有

$$\begin{aligned} R''(\chi) &= -\frac{1}{2}f''(\chi)(\chi-a) - f'(\chi) \\ \Rightarrow R'(\chi) &= -\frac{1}{2}\left(f'(\chi)(\chi-a) - \int_a^x f'(\chi)\mathrm{d}\chi\right) - f(\chi) + C_1 \\ &= -\frac{1}{2}f'(\chi)(\chi-a) - \frac{1}{2}f(a) - \frac{1}{2}f(\chi) + C_1, \end{aligned}$$

根据前面的分析，这里对C_2没有限制. 所以我们构造的辅助函数为,

$$G(\chi) = \int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x - \frac{1}{2}\left(f(\chi)+f(a)\right)(\chi-a) + C_2 \text{ 与 } H(\chi) = (\chi-a)^3$$

证. 构造辅助函数如下:

$$G(\chi) = \int_a^\chi f(x)\mathrm{d}x + \frac{1}{2}(a-\chi)\left(f(\chi)+f(a)\right) + Const.,\ H(\chi) = (\chi-a)^3;$$

显然它们都是$[a,b]$上的连续、可导函数. 其中$G(\chi)$是二次可导函数. 所以

$$\begin{aligned} &\frac{\int_a^b f(x)\mathrm{d}x}{(b-a)^3} = \frac{G(b)-G(a)}{H(b)-H(a)} = \frac{G'(\xi_1)}{H'(\xi_1)} = \frac{2f(\xi_1)-(f(\xi_1)+f(a))-(\xi_1-a)f'(\xi_1)}{6(\xi_1-a)^2} \\ &= \frac{(2f(\xi_1)-(f(\xi_1)+f(a))-(\xi_1-a)f'(\xi_1)) - (2f(a)-(f(a)+f(a))-(a-a)f'(\xi_1))}{6(\xi_1-a)^2-6(a-a)^2} \\ &= \frac{2f'(\xi_2)-f'(\xi_2)-f'(\xi_2))-(\xi_2-a)f''(\xi_2)}{12(\xi_2-a)} = -\frac{f''(\xi_2)}{12},\ a<\xi_2<\xi_1<b \end{aligned}$$

那么存在$a < \xi_2 < b$，使得$\int_a^b f(x)\mathrm{d}x = -\frac{(b-a)^3 f''(t)}{12}$, $a < \xi_2 < \xi_1 < b$，所以

$$\left|\int_a^b f(x)\mathrm{d}x\right| = \left|\frac{(b-a)^3 f''(t)}{12}\right| \le \frac{(b-a)^3 M}{12}$$

致谢

本文由基金项目：贵州省科技计划项目（黔科合基础-ZK[2024]一般 066）；贵州大学高等教育研究项目（703217243301）；贵州大学引进人才科研启动基金项目（(2023)16）赞助。

参考文献

[1] Joseph R W. The mean value theorems and their applications[D]. Columbia University, 1966.
[2] Fan Z S, Fu Y R, Xu H L. Unravelling three differential mean Value theorems in calculus[C]. Highlights in Science, Engineering and Technology, 2024, 88: 790-795.
[3] Shkarin S A. On Rolle's theorem in infinite-dimensional Banach spaces[J]. Mathematical Notes,1992, 51: 311-317.
[4] 王佳颖．关于几类微分中值定理题型的解题策略探究[J]．高等数学研究, 2020, 23(05): 13-14+17.
[5] 党炳新．微分中值定理在中学数学中的应用[D]．信阳师范学院, 2014.
[6] 王一棋．高观点下的中学数学——拉格朗日中值定理在中学数学中的应用[J]．数学教学通讯, 2013, (33): 63-64.
[7] 蒋阳．微分中值定理相关知识在高中数学中的应用及调查研究[D]．牡丹江师范学院, 2019.
[8] 刘文武．两个微分中值定理证明中辅助函数作法探讨[J]．数学的实践与认识, 2005, (08): 242-247.
[9] 朱存斌．利用常数变易法构造辅助函数在微分学中值定理证明题中的应用研究[J]．渤海大学学报(自然科学版), 2023, 44(03): 243-249.
[10] 杨丽娜．再谈应用罗尔定理证明等式过程中辅助函数的构造技巧[J]．高等数学研究, 2016, 19(05): 24-26.
[11] 王志刚，田范基．辅助函数的积分构造法[J]．高等数学研究, 2013, 16(03): 36-38.
[12] 唐珑涛．中值定理证明题中辅助函数构造的万能方法[J]．高等数学研究, 2017, 20(05): 40-41+21.
[13] 张良，郭如强，王燕等．微分方程法在中值定理问题辅助函数构造中的应用[J]．高等数学研究，2023，26(03): 58-60+69.
[14] 陈纪修，於崇华，金路编．数学分析(第三版)[M]．北京: 高等教育出版社, 2019: 140-152.
[15] 同济大学数学科学院学院编．高等数学(第八版)[M]．北京：高等教育出版社, 2023: 122-128.

Copyright © 2024 by author(s) and Global Science Publishing Inc.
This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).
http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/
Open Access