

基于真实情境的高中数学建模活动设计 ——以“足球射门最优化问题”为例

梁晨^{1,2}

1. 扬州大学数学学院, 江苏扬州;

2. 兴化市昭阳中学, 江苏泰州

DOI: 10.62836/jer.v4n10.1503

摘要: 本文以“足球射门最优化问题”为例, 设计真实情境下的高中数学建模活动。围绕射门位置、射门角度与实战选择, 引导学生运用三角函数、导数求取几何最优位置, 适当联系射门力量、空气阻力与守门员站位等现实因素, 并借动态几何辅助观察检验。教学按“情境启问—任务递进—展评反思”推进, 通过阶梯任务完成假设、变量选择、函数表达、求解检验与修正, 深化对建模过程和数学应用价值的理解, 为落实核心素养提供参考。

关键词: 真实情境; 数学建模; 跨学科项目式学习; 核心素养

Design of High School Mathematical Modeling Activities in Real Situations: A Case Study of the Football Shooting Optimization Problem

Chen Liang^{1,2}

1. School of Mathematical Sciences, Yangzhou University, Yangzhou, Jiangsu;

2. Xinghua Zhaoyang Middle School, Taizhou, Jiangsu

Abstract: This paper takes the football shooting optimization problem as an example to design high school mathematical modeling activities in real situations. Focusing on the shooting position, shooting angle and actual combat selection, students are guided to use trigonometric functions and derivatives to obtain the geometric optimal position, and to appropriately consider realistic factors such as shooting force, air resistance and goalkeeper position, and to use dynamic geometry to assist in observation and inspection. The teaching is promoted by situational questioning-task progression-evaluation and reflection. Through the ladder task completion hypothesis, variable selection, function expression, solution test and correction, the understanding of the modeling process and the value of mathematical application is deepened, which provides a reference for the implementation of core literacy.

Keywords: realistic situation; mathematical modeling; interdisciplinary project-based learning; core competencies

《普通高中数学课程标准（2017年版2020年修订）》提出，数学教学应以学科核心素养为导向，通过真实情境和适切问题，引导学生在解决实际问题中发展数学思维与实践能力。数学建模活动正是落实这一要求的重要途径：它以现实问题为起点，经历情境理解、变量提取、假设限定、模型建构、求解检验和反思修正等环节，使数学知识在问题解决中重新组织。已有研究强调，要回归数学教学中真实情境概念的原发语境，梳理真实情境概念的历史脉络，阐释核心素养下真实情境设计观在认知理念、逻辑起点上的转向，指出真实情境应促进从现实世界到数学世界的抽象与转化。本文以“足球射门最优化问题”为例，射门位置、射门角度、球速与轨迹等因素为函数、三角函数、导数及最值等内容提供了具体背景[1]，也使学生有机会在真实条件下讨论“最优”的含义与限制，设计了真实情境下的高中数学建模活动，有效激发高中生的探究意愿，深化模型理解，落实核心素养。

1 情境启问，动机激发

1.1 明确教学目标

教学目标是数学建模活动设计的先导性要素。依据“知识奠基—能力发展—素养进阶”的递进逻辑，本活动设定三个层级的目标体系。

（1）基础知识目标，指向数学内部知识的巩固与深化。学生要能把足球射门情境抽象为平面几何模型，合理选取平面直角坐标系，并运用向量数量积或斜率关系，导出射门角度关于球员坐标的函数表达式。

（2）关键能力目标，指向数学工具的应用训练。学生要能运用导数运算法则求函数的最值点，针对不同参数条件讨论最优位置的变化规律，并在这个过程中体会导数作为研究函数变化率的工具，在真实问题中究竟怎样使用。

（3）综合素养目标，主要指向数学建模视野的扩大，也指向较高层次思维的发展；学生应能适当联系抛体运动、空气阻力等物理知识，对纯数学模型的适用条件和不足进行反思，并借助动态几何软件，把射门角度在空间中的分布呈现出来，最终形成包含数

学推导、模型检验与策略建议的建模成果。

三个目标呈“知识—能力—素养”的认识递进。

1.2 核心问题激发

核心问题是连接建模目标与探究流程的重要环节；一个较好的核心问题，应当具有真实性、开放性和整合性，也就是说，它应来自学生能够感受的情境，允许多种解决路径和结论形态，并能促进多个知识点的配合运用。

本活动设置的核心问题如下：

足球比赛中，进攻球员在禁区前沿获得射门机会；假定球门宽度固定，球员到球门线的垂直距离不变，那么球员沿水平方向移动时，射门角度随位置变化会表现出何种规律？在垂直距离给定的条件下，球员位于水平方向哪个位置时，射门角度最大？进一步而言，若将球员射门力量上限、足球所受空气阻力以及守门员防守范围等现实因素纳入考虑，这一“数学上的最优位置”是否仍可被视为“实战中的最佳选择”？

核心问题分两层：先求几何最优，再讨论现实条件下是否仍最优。

1.3 子问题链设计

在教师引导下，学生围绕上述核心问题展开分组讨论，经归纳与筛选后提炼出以下子问题序列：

子问题1：球门和球员在几何图形中应分别抽象为何种数学元素？选取怎样的平面直角坐标系最为便利？

子问题2：射门角度的大小取决于哪些几何量？球员的水平偏移与垂直距离各自如何影响角度取值？能否建立射门角度关于球员坐标的函数表达式？

子问题3：在垂直距离固定的条件下，射门角度函数在定义域内是否存在唯一的最大值点？如何运用导数工具精确求出该位置？最大射门角度随垂直距离如何变化？

子问题4：如果考虑球员射门力量有限、守门员可能出击等实际因素，数学上求出的“最优位置”是否一定是比赛中最好的选择？请举例说明。

子问题5（选做）：能否用表格、图象或动态

几何软件展示射门角度随位置变化的规律？

2 任务递进与建模进阶

2.1 进阶型任务群建构

在子问题链的基础上，本活动按照“由简入繁、从理及实”的递进逻辑，将建模任务划分为四个层级，每一层级对应明确的子目标与素养指向，见表1。

锚基阶任务：几何建模与函数建构。这一层级对应子问题1至子问题3，是全体学生都要走一遍的核心环节。学生需要把射门情境画成平面几何图形，在坐标系中标出球门端点和球员的动点位置；用向量数量积或两直线夹角关系把射门角度写成代数表达式；再根据实际情况确定自变量的取值范围；最后用导数或函数单调性求出最优位置。这个环节主要涉及数学抽象、直观想象、数学运算和逻辑推理。

递进阶任务：模型检验与现实讨论。这一层级对应子问题4，重点不在算，而在想。数学建模是对现实问题进行数学抽象、表达和构建模型解决问题的素养，它构建“提出问题→建立模型→解决问题”程序链。学生以小组为单位，讨论球员射门力量有限、守门员可能出击这些现实因素会不会改变“最优位置”的判断[2]，能不能举出数学结论和实战选择不一致的例子，并对模型假设是否合理作出初步评价。空气阻力等内容不要求定量分析，能定性讨论即可。这一层主要指向模型观念、数据分析和科学探究素养。

拓展阶任务：参数变式与结构迁移。这一层级供学有余力的学生选做，目的是让学生对模型结构有更深入的理解。在跨学科项目式学习视域下，引导学生综合运用数学、物理、地理、测量等多学科知识开展建模活动，借助项目式学习让学生亲身经历完整的建模过程。比如改变球门宽度参数后重新求最优位置[3]，看看结论怎么变；或者给守门员加上一个简化的防守范围，讨论“进球可能性最大”和“几何角度最大”是不是一回事；也可以把水平位置的讨论扩展到不同垂直距离下最优射门点的比较。这一层侧重发散思维、变式迁移和综合应用。

融通阶任务：技术呈现与成果凝练。这一层级对应子问题5，以选做或小组合作的方式推进。学生可以用GeoGebra等动态几何软件做一个射门角度交互模型，拖动球员位置时角度能实时显示；可以运用Python与几何绘图板实现抽象概念的可视化与动态化，在真实情境中引导数学建模并培育工程思维，配套以过程—结果—反思的多元评价体系[4]；也可以用表格或图象把角度随位置变化的规律呈现出来；条件允许的话，写一份简明的建模报告，把数学推导、讨论过程和结论建议整合在一起。这一层侧重技术融合、成果表达和实践创新。

2.2 创设情境，探究建模

活动1

师：播放足球比赛集锦并定格于射门瞬间，提出核心问题：射门角度由哪些几何量决定？球门宽度固定时，球员位于正前方与斜侧方，何处射门角度更大？

师：要回答这个问题，先要把“射门角度”变成可计算的数学对象。请大家讨论：如果只研究球员沿水平方向移动时射门角度的变化，哪些因素可以暂时忽略？哪些量必须保留？

模型假设与符号约定：

①球门抽象为线段，宽度为，中点为，球门线为；

②球员抽象为点，其中为球员到球门线的垂直距离，为球员相对球门中点的水平偏移；

③暂不考虑球的高度、旋转、空气阻力、守门员站位和射门力量上限；

④射门角度记为，即球员对球门两端的张角；

⑤结合场地实际，取在合理区间内变化。

师：这些约定是对现实的暂时简化，目的是先建立可研究的函数模型。在此基础上，各组在坐标纸上绘制球门与若干测点……

随后，布置任务：各组在坐标纸上绘制球门与若干测点，用量角器测量并记录各点射门角度，观察其随水平位置变化的规律；进而建立平面直角坐标系，将射门角度表示为球员位置的函数，尝试用斜率或向量方法推导表达式，并利用导数或函数单

表1. “足球射门最优化”问题进阶型任务安排

任务	链接子问题	任务分解
锚基阶任务	子问题1、2、3	1.抽象为几何元素，建立合适平面直角坐标系
		2.分析射门角度影响因素，建立射门角度关于球员坐标的函数，确定定义域
		3.固定垂直距离，利用导数研究射门角度函数，求解最大射门角度的位置，分析垂直距离对最优位置的影响
递进阶任务	子问题4	1.分析射门力量、守门员出击等实际条件
		2.对比数学最优位置与赛场实际选择，举例说明二者差异
		3.评估原有建模假设的合理性（定性讨论，不要求定量）
拓展阶任务	子问题5	1.修改球门宽度，重新求解最优位置，观察结论变化
		2.增设守门员防守范围，区分几何最大角度与实际进球概率
		3.比较不同垂直距离下最优射门点规律
融通阶任务	子问题5 (选做)	1.用表格、图像、GeoGebra 动态软件展示射门角度变化规律 2.撰写建模报告，整合推导、讨论、结论建议

调性求取最优位置。

【学生活动】学生分为四人小组，在坐标纸上绘制球门线段并选取不同水平偏移与垂直距离的测点，用量角器测量各点射门角度并记录数据，观察角度随位置变化的趋势。随后各组讨论建系方案，确定坐标系并标注球门端点与球员位置。在推导射门角度函数表达式时，学生尝试不同路径，比较其优劣后选定一种方法继续运算。各组运用导数或函数单调性求极值，得出最优位置结论，并汇总交流。

【教学说明】这一环节以真实比赛视频为起点，意在唤起学生的直观判断，并通过测量活动制造认知冲突。以足球比赛的最佳射门点问题为情境引入，指出其在数学上可归结为求最大张角的问题，并运用三角函数、导数等数学工具加以解决，与本文的核心建模问题直接对应。学生凭经验对“何处射门角度最大”产生分歧，进而动手测量[5]，发现角度随水平位置呈现先增后减的规律。这一过程，使问题从模糊直觉转向可量化的数学对象。建系与函数表达式的推导是建模的核心步骤。这里的假设与符号不是教师强加，而是从“如何把射门角度表示成函数”的需要中生成；它们为后文讨论射门力量、空气阻力、守门员站位等现实因素留下了反思空间。学生尝试不同推导路径，并在比较中体会数学工具的选择对后续运算的影响。这种比较本身就是数学建模判断力的训练。这一环节也为后续反思模型假设埋下了伏笔：数学上的最优位置，是否等同

于实战中的最佳选择？

请结合表2、表3及以下材料，讨论“何处射门角度最大”是否会受到实际条件影响。

首先，射门力量存在上限。距离越远，所需最低初速度越大，有效射程因此受限。球员在正前方获得最大射门角度，但如果该位置超出其有效射程，这一“数学最优”在实战中就未必可行。也就是说，几何角度最大的位置，未必是力量上最可行的位置。

表2. 空气阻力对射门球速与飞行时间的影响

射门条件	到达球门 时速度	20 m距离 飞行时间	对实战的影响
无空气阻力	约	约	守门员反应时间紧
有空气阻力	约25	约	守门员反应时间稍多
逆风	更低	更长	守门员反应时间更充足

表中数据为按距离与速度的粗略估算，忽略旋转、海拔等因素，仅用于课堂定性讨论。

表3. 守门员站位对有效射门角度的影响

守门员站位	有效射门角度变化	实战选择
站在球门中央	中间被封堵，两侧有效角度对称减小	几何最优（正前方）被遮挡，需向两侧偏移
偏向左侧	右侧有效角度增大	球员可选择右侧稍偏位置
偏向右侧	左侧有效角度增大	球员可选择左侧稍偏位置
出击	进一步压缩有效角度	需挑射或快速变向

本表为定性分析，不考虑守门员移动速度和球员精度差异。

【教学说明】此段旨在把探究从纯数学领域引向模型反思。学生通过活动1已获得确定的数学

解，但该解建立在若干理想化假设之上。教师的追问并非否定数学结论，而是引导学生审视模型的边界。学生需讨论射门力量上限对有效射程的约束、空气阻力对飞行轨迹的衰减、守门员站位对射门角度实际价值的影响等。通过讨论，学生将认识到：若正前方在射程内，几何最优与力量可行一致；若正前方不在射程内，则不是通过水平移动解决，而需改变射门距离、提高力量，或考虑守门员站位后的实战选择。这一过程使学生理解，数学模型是对现实的简化，其结论具有条件性。能求出精确解是一种能力，能清醒认识解的适用条件和局限，则是更高层次的建模素养。本环节不要求定量分析复杂物理因素，重在定性讨论与批判性反思，以深化对数学建模本质的理解。

3 展评反思，修正深化

在高中数学建模活动中，评价应嵌入建模过程，关注假设、求解、检验、反思，而非只看答案。就“足球射门最优化问题”而言，评价尤其要考察学生能否说明模型假设、能否根据条件变化调整结论、能否意识到数学最优与实战选择之间的差异。通过过程性记录与成果展示相结合的方式，教师可以更准确地判断学生在数学抽象、运算推理和模型反思等方面的发展状况，并据此调整后续建模活动的设计与指导。这样的评价，既服务于学生建模能力的持续提升，也为改进教学提供依据。

3.1 建模成果呈现

数学建模活动的成效，最终要落实在学生所呈现的成果上。教师需要借助成果展示与交流的环节，引导学生回顾建模过程，在审视自身与他人工作的基础上获得新的认识。在数学建模活动教学设计中，活动前整合制定了适用于本次活动的数学建模素养水平评价标准，方便教师对学生进行课堂观察，强调评价标准应与建模活动目标紧密结合[6]。

就“足球射门最优化问题”而言，学生所形成的成果并不拘于一种形态，而是与其探究的推进程度相对应。在初步建构数学模型时，学生提交的是射门角度函数的建立过程，包括坐标系选取、变

量设定、表达式推导，以及利用导数或函数单调性求取最优位置的计算步骤。当探究转向模型局限的讨论时，学生以小组为单位整理出对模型假设的质疑，如射门力量、空气阻力、守门员防守等因素对“最优位置”的影响，并用文字或图表说明数学结论与实战选择之间可能存在的差异。在尝试改变条件或参数时，学生重新求解并比较结论的变化，或进一步讨论“进球概率最大化”与“几何角度最大化”是否一致。在整合成果并加以呈现时，学生运用动态几何软件制作射门角度交互模型，或绘制前场区域角度分布图，并撰写简明的建模报告，将数学推导、讨论过程与结论建议汇为一体。

需要说明的是，成果展示并不要求所有作品都采用同一种样式，也不把规模大小当作判断标准；展示和交流的作用，在于学生能在表达和倾听的过程中，重新检查自己的建模想法，增加参与程度，同时加深对数学和实际之间联系的理解。

3.2 开展多元性评价

在数学建模活动中，评价量表可以作为一种工具，用于记录与判断学生表现；它并非仅用于评定最终结论的对错，而是对学生在建模各环节中的行为、成果与反思进行等级描述。针对教师主导型、策略指导型和学生完全独立型等不同课堂类型，提出了教师对学生数学建模能力评价的量表和框架，教师可以通过跟踪学生的课堂建模能力得分获得学生进步情况，并根据不同分数段给出相应的指导策略。针对“足球射门最优化问题”，评价量表4可以从情境理解与变量提取、模型假设与函数建构、数学运算与最值求解、模型检验与条件讨论、成果表达与交流反思、小组协作与参与程度等方面进行设计[7]；这些方面既关注学生对三角函数、导数等知识的运用水平，也关注其在建模过程中所作的判断与调整。评价的用意在于促进学习，而不是单纯给出结果。该研究构建了以“问题意识、构建模型、模型应用”3个一级指标和9个二级指标组成的高中生数学建模素养测评模型，通过专家咨询法进行指标修正和完善，结果显示调查对象对已构建的指标体系总体认同度较高。因此，在活动开始前，

量表宜由教师提供给学生，使其了解评价内容与标准；活动结束后，量表宜及时回收并分析，以掌握学生的学习状况，并据此改进后续建模活动的设计与指导[8]。

①评价维度覆盖建模活动的关键环节，既关注结果也关注过程。②建议在活动开始前向学生提供量表，明确评价标准；活动结束后及时回收，以便掌握学习情况并改进后续教学。

3.3 模型优化反思

数学建模活动的设计与实施，并非一次完成即可定型，其完善需要在反复检讨中逐步实现；每次活动结束后，教师应带领学生回顾，本次建模目标是否达成，各环节任务推进是否合理，模型假设与求解过程是否存在疏漏，以及结论在多大程度上回应了最初的现实问题。

如果说数学建模是把球场上的射门选择转化为数学对象的过程，那么活动反思便是从数学结论返回真实情境的再判断。学生所求出的最优位置，未必等同于实战中的最佳选择；模型所给出的精确解，也需要接受现实条件的检验。从求解数学答案到回应真实问题，让评价推动反思，让反思修正模型，这一循环应贯穿于数学建模活动的始终。

4 总结与反思

导数与最值是高中数学的重要内容，其教学价值不仅在于使学生掌握求导法则和计算步骤，更

在于让学生体会如何用数学工具处理变化与优化的问题。以往教学多用纯数学例题训练运算，虽能提高计算熟练度，却较少让学生经历从真实情境中抽象、假设、建模、检验的完整过程，容易导致机械套用公式，忽视模型的条件与限度。

将足球射门最优化问题引入导数与最值教学后，学生面对的不再是一道已设定好变量和函数的练习题，而是一个需要自己识别变量、提出假设、建立关系并检验结论的真实问题。在逐步推进的探究中，学生需要把射门情境转化为几何图形，把角度变化表达为函数关系，再借助导数或函数单调性求取最优位置。随后，学生还要讨论射门力量、空气阻力、守门员防守等因素对模型结论的影响，从而认识到数学解与实战选择之间可能存在差异。这一过程不仅巩固了三角函数、导数等知识，也使学生初步形成了用数学语言描述现实问题、根据条件调整结论的意识，数学抽象、逻辑推理、数学运算和模型观念等素养得到相应发展。

总之，将基于真实情境的数学建模活动融入高中数学课堂，并非对既有教学序列的简单增补，而是促成教学范式由知识传授向素养培育转型的可行进路。以“足球射门最优化问题”为载体，学生在问题驱动与任务递进中经历数学化、模型建构、求解检验与反思修正的完整过程，数学抽象、逻辑推理、数学运算、直观想象与模型观念等核心素养得以在真实问题解决中协同发展；教师亦可借此优化教学组织与指导策略，推动“教—学—评”一体化

表4. “足球射门最优化问题”数学建模活动评价量表示例

维度	指标	具体描述	评分（1-5分）
问题提出	问题表述	能准确理解足球射门情境，明确要解决的问题，表述清晰、逻辑合理	
	变量识别假设	能识别影响射门角度的主要变量，并作出合理假设	
模型建构	坐标系建立	能合理建立平面直角坐标系，正确标注球门端点和球员位置	
	函数关系推导	能运用向量数量积或斜率关系推导弹射角度关于球员位置的函数表达式	
数学运算	导数运算	能正确运用求导法则对函数求导，解方程求驻点	
	最值判断	能判断极值类型，得出最优位置，并说明其数学含义	
检验条件	模型假设反思	能讨论射门力量、空气阻力、守门员防守等因素对模型结论的影响	
	结论适用分析	能说明数学最优位置与实战最佳选择之间的差异，理解模型的局限	
交流反思	建模报告	能撰写简明的建模报告，包含推导过程、结论与讨论	
	展示与交流	能清晰展示模型，回应质疑，反思建模过程	
协作参与	分工合理性	小组内分工明确，各司其职	
	沟通与协作	能有效讨论，整合意见，共同完成建模任务	

的落实，实现自身专业素养的持续提升。

参考文献

- [1]张晶,夏小刚,范业婷,等.数学教学中真实情境的设计:认知转向及其教学意蕴[J].数学教育学报,2025,34(2):97-102.
- [2]欧阳才学,全斌,黄鹤皋.基于项目式学习的高中数学建模教学——以人口增长函数模型为例[J].教学考试,2025,(47):4-7.
- [3]杜欣.跨学科项目式学习视域下的高中数学建模教学——以“测量学校内外建筑物的高度”教学为例[J].数学教学通讯,2025,(21):33-35.

- [4]鲍涵.STEM背景下高中数学概念教学的实践性研究[J].中学数学,2025,(19):19-20.
- [5]彭博.最大视角问题与米勒定理[J].高中数学教与学,2021,(5):17-19.
- [6]胡佳婧.聚焦数学建模活动重视核心素养评价——以“黑板照明灯的安装位置设计”为例[J].中学数学月刊,2025,(6):47-49+76.
- [7]王海华.在数学建模课堂中评价学生的数学建模能力[J].数学建模及其应用,2022,11(1):106-114.
- [8]杨正朝,熊星月,卢信羽.高中生数学建模素养测评模型的构建[J].中学数学杂志,2023,(7):9-13.

