教育学刊
Journal of Education Research

Global Science Publishing

线性代数的教学设计——以实二次型为例

张坤
湖北大学数学与统计学学院，湖北武汉

摘要：线性代数是数学、计算机、电子类、经济类等各专业的基础课程。通过该课程的学习，能够提升学生逻辑思维的严谨性，培养学生抽象概括的能力，以及提出问题、解决问题的能力。本文以实二次型为例介绍线性代数的教学设计。

关键词：线性代数；实对称矩阵；二次型；教学设计

The design of teaching about linear algebra–take real quadratic forms as an example

Zhang Kun
Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan, Hubei

Abstract: Linear algebra is a foundational course for majors such as mathematics, computer science, electronics, economics, and others. Through studying this course, students can improve the rigor of their logical thinking, develop their abilities in abstract generalization, and enhance their skills in posing questions and solving problems. This article introduces the teaching design of linear algebra using the example of real quadratic forms.

Keywords: linear algebra; real symmetric matrices; real quadratic forms; teaching design

1 引言

线性代数课程内容丰富，主要围绕向量、矩阵和线性变换等核心概念展开，旨在培养学生的空间直观和想象能力、抽象思维和逻辑推理能力。它是理工科大学生必修的数学基础课之一，也是硕士研究生入学全国统一考试中必考的数学课程之一。

瑞典数学家 L.Garding 在其著作‘数学概观’中指出，如果不熟悉线性代数的概念，像线性性质、向量、线性空间、矩阵等，要去学习自然科学，现在看来就和文盲差不多，甚至学习社会科学也是如此[2]。丘维声教授指出，按照‘观察→抽象→探索→猜测→论证’这一教学顺序讲授数学知识，可以使得学生较好的学习数学，感受数学思维的熏陶[3]。

由于学时有限，采用统一的教学进度和教学方法，难以满足不同层次学生的学习需求。对于基础较好的学生，可能会觉得课程内容过于简单，缺乏挑战性；而对于基础薄弱的学生，则可能会觉得课程内容难以理解，产生挫败感。因此，合理的教学设计有助于激发学生的学习兴趣，提高他们的学习效率，提升他们的学习满意度和自信心，培养学生的创新思维和实践能力。本文实二次型为例开展教学设计的研究。

2 实二次型的教学设计

2.1 创设情景、导入新课

创设情景：动画放映平面截取以原点为中心的圆锥曲面所得的图形，如：圆、椭圆、抛物线、双曲线等。用方程的语言给出这些曲线的一般描述：$ax^2+2bxy+cy^2+dx+ey+f=0$[6,§5.1]。

提出问题：什么样的截面交线，使得$d=e=0$?

动画放映中心位于坐标原点的曲线，给出它们

的方程：$ax^2+2bxy+cy^2=-f$.

提出问题：这样的函数$ax^2+2bxy+cy^2$具有什么特点，与我们所学的矩阵有什么样的联系？

2.2 温故而知新

回顾矩阵乘法的前提条件：矩阵$A_{m\times n}$和$B_{s\times t}$可以相乘，则必有$n=s$，且乘积所得的矩阵是$m\times t$阶矩阵[4,§4.2]。

例1.计算$(x,y)\begin{pmatrix} a & 3b \\ -b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

通过该例题的结果，来阐释2.1中函数与矩阵乘法的联系。

例2.计算$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

通过该例题的结果，分析每一项的系数组成。

2.3 勇于猜测

例3.$(x_1,x_2,\dots,x_n)\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}$.

让学生猜测上述式子的乘积结果，展示乘积结果，分析上述结果是关于变量$x_1,x_2,\dots,x_n$的二次齐次函数(课下学生自己验证)。

2.4 引出二次型的定义

定义1. 系数为实数的关于$x_1,x_2,\dots,x_n$的二次齐次函数，形如：$f(x_1,x_2,\dots,x_n)=k_1x_1^2+k_2x_2^2+\dots+k_nx_n^2+\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}k_{ij}x_ix_j$，称为$n$元实二次型，简称二次型。

2.5 矩阵标识二次型

通过例1，说明任取n阶实方阵A，$f(x)=x^TAx$是二次型。

例4.计算

$$(x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \\ 4 & 2 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\quad (x_1,x_2,x_3)\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 2 & 5 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

通过例4的结果，说明不同的方阵A，对应的二次型$f(x)=x^TAx$可能相同。

思考：怎样建立二次型与矩阵的一一对应，即如何用矩阵标识二次型？引出二次型矩阵的概念。

定义2.任取实二次型$f(x)$，使得$f(x)=x^TAx$的实对称矩阵A，称为二次型$f(x)$的矩阵。矩阵的A的秩也称为二次型的秩。

2.6 列举二次型的应用

在优化问题中，目标函数经常可以表示为二次型的形式。通过求解二次型的极值，可以找到最优解或近似最优解[1, 5]。例如，在线性回归和最小二乘法中，目标函数就是二次型的。通过将其标准化，可以更容易地找到最优拟合参数，从而提高模型的预测精度。在机器学习中，二次型也扮演着重要角色[7]。例如，在支持向量机（SVM）中，目标函数是一个二次规划问题，其约束条件也是由二次型表示的。在控制理论中，二次型也用于设计最优控制器[8]。通过构造一个二次型的目标函数，并求解其极值，可以得到最优的控制策略。这种方法在自动化控制、航空航天等领域中得到了广泛的应用。

分析二次型：一般二次型有n个平方项，$n(n-1)/2$个混合项。因此，在计算机编程中，当n很大时，处理包含混合项的二次型求极值或近似解时，其时间复杂度往往较高。

思考：如何降低混合项的个数，或者消除混合项?

2.7 引入标准型

定义3.形如$k_1x_1^2+k_2x_2^2+\dots+k_nx_n^2$的二次型称为标准二次型。

思考：如何建立一般二次型与标准二次型的联系?

由于课时的原因，一般线性空间的线性变换的知识点是不讲的。回顾实对称矩阵可正交对角化的相关知识：设A是n阶实对称矩阵，则存在n阶正交矩阵Q，使得$Q^TAQ=\mathrm{diag}(\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_n)$. 如果我们令$x=Qy$，此时$x$和$y$是一一对应的，且$f(x)=x^TAx=\lambda_1y_1^2+\lambda_2y_2^2+\dots+\lambda_ny_n^2$.我们将上述变换$x=Qy$称为是正交线性变换。

2.8 引入可逆线性变换、二次型等价与矩阵合同

定义4.任取n阶方阵C,关系式$x=Qy$称为由变量$x=(x_1,\dots,x_n)^T$到变量$y=(y_1,y_2,\dots,y_n)^T$的线性变换。如果C可逆时，我们称上述线性变换为可逆线性变化。

分析经过线性变换$y=Cx$,二次型$f(x)=x^TAx$与二次型$g(y)=y^TC^TACy$的取值关系，对应的二次型矩阵的形式。如取C为零矩阵，以及一些2-元二次型的实例分析，阐述C取可逆矩阵的重要性，进而引入二次型等价以及矩阵合同的概念。

定义5.我们称n阶是对称矩阵A合同于B，如果存在可逆矩阵C,使得$B=C^TAC$.

定义6.我们称二次型$f(x)$与二次型$g(y)$等价,如果经过可逆线性变换$x=Cy$,可将二次型$f(x)$化为$g(y)$,我们称二次型$f(x)$与$g(y)$等价。

分析二次型等价与矩阵合同的关系。简单回顾矩阵相似的知识点，解析矩阵相似与合同的联系。

2.9 归纳总结，深化理解

1. 二次型本质是实系数二次齐次函数；
2. 二次型可用矩阵乘法表示，为了确保对应的唯一性，引入二次型矩阵的概念：实对称矩阵；
3. 为了简化二次型的混合项，我们定义了可逆线性变换，引入二次型的等价，矩阵的合同关系。
4. 合同虽然由二次型的矩阵引入，但是合同的定义不局限于实对称矩阵。

2.10 课后思考

提出问题：如何判别矩阵合同、如何判别实对称矩阵合同、如何判别二次型等价？能否通过实对称矩阵的相似来判别实对称的合同？

通过所留问题，让学生产生学习的兴趣，课后带着问题去回顾本节所学知识点，提高他们自学的积极性，在本节中找不到问题的答案，就有可能去预习下节课堂内容。

3 总结

作者从事线性代数教学六年，深知线性代数的重难点，也深切体会教学课时的局限性，很多教学内容没有办法深入展开。通过学生的反馈情况，一步一个脚印地探索如何教好线性代数。就目前学生的课堂表现，课后的反馈情况来看，上述二次型教学设计的教学实践确实能够激发学生的学习兴趣，提升学生学习的积极主动性，让学生感受数学严密逻辑思维的熏陶。

参考文献

[1] 董祖引,周继东.二次型极值及其推广的几个结论[J], 河海大学学报, 2000,28(4):116-118.
[2] L. Garding.数学概观[M], 北京: 科学出版社, 1984.
[3] 丘维声. 高等代数[M], 北京: 科学出版社, 2013.
[4] 王萼芳, 石生明. 高等代数[M], 北京: 高等教育出版社, 2018.
[5] 徐阳栋.二次型在多元函数极值问题上的应用[J].教育教学论坛, 2015, 28:180-181.
[6] 徐运阁, 曾祥勇, 陈媛. 线性代数[M], 北京: 科学出版社, 2022.
[7] 张松兰.支持向量机的算法及应用综述[J].江苏理工学院学报, 2016, 22(2):14-1721.
[8] 周紫菱,汤卿, 姚进. 基于线性二次型最优控制的机器人示教数据处理系统设计[J]. 控制工程, 2023, 30(10): 1846-1851.