Global Science Publishing

高等代数的教学设计—以欧式除法为例

吴晗
湖北大学数学与统计学学院，湖北武汉

摘要：高等代数是高等院校数学专业的一门重要的基础课程。通过这一课程的教学，使学生系统地掌握一元多项式和线性代数基础理论和基本方法，提高学生数学抽象、逻辑推理、发现问题、解决问题的能力。本文以欧式除法为例介绍高等代数课堂教学设计。
关键词：高等代数；教学设计；欧式除法；欧几里得整环；数学归纳法

Teaching Design for Advanced Algebra—Take Euclidean Division as an Example

Han Wu
Faculty of Mathematics and Statistics, Hubei University, Wuhan, Hubei

Abstract: Advanced algebra is an important basic course for mathematics majors in universities. Through teaching this course, let students systematically master the basic theories and basic methods of polynomials in one variable and linear algebra, and improve students' mathematical abstraction, logical reasoning, problem discovery and problem solving ability. This paper takes Euclidean division as an example to introduce the teaching design of advanced algebra classes.
Keywords: Advanced Algebra; Teaching Design; Euclidean Division; Euclidean Domain; Mathematical Induction

1 引言

18、19 世纪数学家们经过不懈、深入的研究，使得高等代数成为现代数学的基石之一。目前，高等代数是高等院校数学专业的一门重要的基础课程，为解析几何、高等几何、抽象代数、微分方程、泛函分析等后继课程提供所需的基础理论和知识。此课程包括一元多项式理论和线性代数理论两部分，参看[1, 2]。该课程为培养学生坚实的数学基础与深厚的数学核心素养奠定基础，培养学生大胆质疑、独立思考、批判反思的数学精神。通过该课程教学，使学生系统地掌握一元多项式和线性代数基础理论和基本方法，提高学生数学抽象、逻辑推理、发现问题、解决问题的能力。

此课程是中学代数知识体系的继续与提高。我们采取的数学思维方式一般为：对研究对象进行观察，与以往知识进行类比，进行合理的猜测，最后给出猜测的详细论证；并将这一数学思维方式应用到高等代数的教学设计中去。与[3]采用的教学设计方案相比，该教学设计方案更容易让学生接受新的内容，更能培养学生发现问题、解决问题的能力，也极大提高了教学效率。

欧式除法，也称带余除法，是高等代数中一元多项式理论的基础，它是欧几里得整环所特有的性质。利用欧式除法可以判定两多项式是否整除，以及求两多项式的最大公因式。一元多项式环和整数环都是欧几里得整环，都可以做欧式除法。而整数的欧式除法在小学就已经很熟知，因此可以通过类比进行一元多项式欧式除法的教学设计。本文以欧式除法为例阐述该教学设计理念。通过本节课，学生能够理解、掌握一元多项式的欧式除法，能够用数学归纳法进行相关命题的证明。通过两多项式与两整数进行类比，学生可以猜测两多项式的最大公因式存在，以及尝试用数学归纳法证明它的存在性。

2 理论依据

欧几里得整环是一类特殊的主理想整环，欧式除法是它所特有的性质。为了方便读者阅读，我们回顾下抽象代数[4，第四章§2 定义 1]中欧几里得整环的定义。

定义 2.1. 设R 为一个整环。如果存在R 的非零元 $R\backslash\{0\}$ 到自然数 $\mathbb{N}$的一个函数 d: $R\backslash\{0\}\to\mathbb{N}$，使得对于任意的元素对$(a,b)\in R\times R\backslash\{0\}$，存在$(q,r)\in R^2$ 使得 $a=qb+r$，其中$r=0$ 或者 $d(r)<d(b)$。则R 叫做一个欧几里得整环。

在整数环 $\mathbb{Z}$ 中定义函数

$$d:\quad \mathrm{Z}\to\mathrm{N}$$
$$a\mapsto |a|$$

$|a|$表示整数 a 的绝对值。下面的定理：整数的欧式除法，在小学我们已经熟知了。

定理 2.2. 整数环$\mathbb{Z}$是一个欧几里得整环，即: $\forall a,b\in\mathbb{Z}, b\neq 0$, 存在唯一的 $(q,r)\in\mathbb{Z}^2$ 使得 $a=bq+r$, 其中 $0\le r<|b|$。

另一个欧几里得整环的例子就是本节课要介绍的内容：数域 F 上的一元多项式环 $F[x]$是一个欧几里得整环。由于他们都是欧几里得整环，所以可以进行类比。

3 创设情景

先通过整数 224 被 18 除得商数 12，余数 8 的例子，在黑板上回顾下整数欧式除法的过程。

$$\begin{array}{r|l} & \;12 \\ \hline 18 & 224 \\ & 18 \\ \hline & 44 \\ & 36 \\ \hline & 8 \end{array}$$

$$224=18\times 12+8.$$

给定两个多项式 $f(x)=2x^3+5x^2-3x+5, g(x)=x^2+4x-3$, 仿照整数欧式除法，我们能作如下类似的运算过程。

$$\begin{array}{r|l} & 2x\;-3 \\ \hline x^2+4x-3 & 2x^3+5x^2-3x+5 \\ & 2x^3+8x^2-6x \\ \hline & -3x^2+3x+5 \\ & -3x^2-12x+9 \\ \hline & 15x-4 \end{array}$$

$$2x^3+5x^2-3x+5=(x^2+4x-3)(2x-3)+15x-4.$$

不难发现，当剩余的式子为 $15x-4$ 时，我们不能再将其次数降低，且此时它的次数 $\deg(15x-4)=1$ 严格小于 $g(x)$ 的次数 2.

4 观察类比

将上面两个运算过程进行对比，我们得到下面的表格

两整数 $a=224$, $b=18\neq 0$	两多项式 $f(x)=2x^3+5x^2-3x+5$, $g(x)=x^2+4x-3\neq 0$
商数 $q=12$, 余数 $r=8$	商式 $q(x)=2x-3$, 余式 $r(x)=15x-4$
$224=18\times 12+8$	$2x^3+5x^2-3x+5=(x^2+4x-3)(2x-3)+15x-4$
$a=bq+r$	$f(x)=g(x)q(x)+r(x)$
$\|b\|$	$\deg(g(x))$
$r=8, \|b\|=12$	$\deg(r(x))=1, \deg(g(x))=2$
$r\neq 0, 0<r<\|b\|$	$r(x)\neq 0, \deg(r(x))<\deg(g(x))$

两个整数可以比较大小，函数 d 定义为

$$d:\quad \mathrm{Z}\to\mathrm{N}$$
$$a\mapsto |a|$$

类似地，两多项式比较次数，函数 d 定义为

$$d:\quad F[x]\backslash\{0\}\to\mathrm{N}$$
$$f(x)\mapsto \deg(f(x)).$$

5 提出猜测

通过上面的观察、对比，类似定理 2.2，我们可以做出如下猜测，这正是我们本节课要讲解的主要定理 [1, 定理 1.5.1], [5, Chapter IV Theorem 1.1],[6, Chapter XI Theorem 1.1]。

定理 5.1. 数域 F 上的一元多项式环 $F[x]$是一个欧几里得整环，即：$\forall f(x), g(x)\in F[x], g(x)\neq 0$, 则存在唯一的 $q(x), r(x)\in F[x]$ 使得 $f(x)=g(x)q(x)+r(x)$, 其中 $r(x)=0$ 或者 $\deg(r(x))<\deg(g(x))$。

6 详细论证

从上面的运算过程看到，证明定理 5.1 的关键在于将 $f(x)$的次数降下来。而非零多项式的次数是自然数，采用数学归纳法能将不断降低次数的过程写得简洁、清晰、有条理。

证 明 存在性：若 $f(x)=0$，令 $q(x)=0, r(x)=0$. 存在性成立。假设 $f(x)\neq 0$. 对次数 $\deg(f(x))=n$ 作归纳。

(1) 当 $\deg(f(x))=0$ 时，若 $\deg(g(x))=0$, 则 $g(x)\in F^{\times}$是数域 F 中非零元，设其逆为$\boldsymbol{b_0^{-1}}$，令 $q(x)=\boldsymbol{b_0^{-1}}f(x), r(x)=0$. 存在性成立。

若 $\deg(g(x))>0$, 则 $\deg(f(x))<\deg(g(x))$, 令 $q(x)=0, r(x)=f(x)$. 有 $\deg(r(x))<\deg(g(x))$. 存在性成立。

(2) 假设对于$k \in \mathbb{Z}_{\geq}0$,命题对所有$\deg(f(x)) = n$满足$0 \leq n \leq k$成立。

当 $\deg(f(x)) = k+1$ 时，若 $\deg(f(x)) < \deg(g(x))$, 令 $q(x) = 0, r(x) = f(x)$. 有 $\deg(r(x)) < \deg(g(x))$. 存在性成立。

若$\deg(f(x)) \geq \deg(g(x))$,不妨设

$$f(x) = \sum_{i=0}^{k+1} a_i x^i, a_{k+1} \neq 0, g(x) = \sum_{i=0}^{m} b_i x^i, b_m \neq 0,$$

且 $k+1 \geq m$, 令 $f_1(x) = f(x) - a_{k+1} b_m^{-1} g(x) x^{k+1-m}$, 则 $f_1(x) = 0$ 或者 $\deg(f_1(x)) \leq k$.

- 若$f_1(x) = 0$,则令$q(x) = a_{k+1} b_m^{-1} x^{k+1-m}$, $r(x) = 0$.存在性成立。
- 若$0 \leq \deg(f_1(x)) \leq k$,由归纳假设，存在$q_1(x), r(x)$使得$f_1(x) = g(x) q_1(x) + r(x)$, 其中 $r(x) = 0$ 或者 $\deg\ (r(x)) < \deg(g(x))$. 代入 $f_1(x) = f(x) - a_{k+1} b_m^{-1} g(x) x^{k+1-m}$ 得：$f(x) = g(x)(q_1(x) + a_{k+1} b_m^{-1} x^{k+1-m}) + r(x)$. 令 $q(x) = (q_1(x) + a_{k+1} b_m^{-1} x^{k+1-m})$，存在性成立。

由第二数学归纳法，存在性得证。

唯一性：若存在 $q_1(x), q_2, r_1(x), r_2(x) \in F[x]$ 使得 $f(x) = g(x)q_1(x) + r_1(x), f(x) = g(x)q_2(x) + r_2(x)$,

其中 $r_1(x) = 0$ 或者 $\deg(r_1(x)) < \deg(g(x))$; $r_2(x) = 0$ 或者 $\deg(r_2(x)) < \deg(g(x))$.

两式相减得：$0 = g(x)(q_1(x) - q_2(x)) + r_1(x) - r_2(x)$. $\therefore -g(x)(q_1(x) - q_2(x)) = r_1(x) - r_2(x)$.

若 $q_1(x) - q_2(x) \neq 0$，则

$\deg(g(x)) + \deg(q_1(x) - q_2(x)) = \deg(-g(x)(q_1(x) - q_2(x))) = \deg(r_1(x) - r_2(x))$

而

$\deg(r_1(x) - r_2(x)) \leq \max\{\deg(r_1(x)), \deg(r_2(x))\} < \deg(g(x))$.

这不可能。因此 $q_1(x) - q_2(x) = 0, r_1(x) - r_2(x) = 0$ 即 $q_1(x) = q_2(x), r_1(x) = r_2(x)$. 唯一性得证。

课堂巩固练习：

用欧式除法求 $3x^4 - 2x^3 + 7x + 5$ 被 $3x^2 - 2x + 1$ 除所得的商式和余式。

7 结论

本节课的教学内容是一元多项式的欧式除法。采取的数学思维方式为：对研究对象进行观察，与以往知识进行类比，进行合理的猜测，最后给出猜测的详细论证。通过这堂课的学习，学生们能够用欧式除法求商式和余式，能够用数学归纳法写证明过程。能力方面，提高学生通过类比发现问题，进行猜测，解决问题的能力，提高学生的数学素养。

致谢

作者感谢湖北大学数学与统计学学院为他提供高等代数课程教学平台，感谢国家自然科学青年基金项目: 12301014 和湖北省自然科学青年基金项目: 2023AFB282 的支持，感谢 2024 年湖北大学教学改革研究项目：用人工智能赋能高校数学教学 (2024) 的支持。本文的完成得益于相关文献、著作对本文的启发以及审稿专家的宝贵建议。

参考文献

[1] 徐运阁、章超、廖军，高等代数 [M]，北京：科学出版社, 2023.8.

[2] 北京大学数学系前代数小组编、王萼芳、石生明修订，高等代数 [M]，北京：高等教育出版社，第5版，2020.4.

[3] 杨胜，高等代数的教学设计与实践–以维数公式为例 [J]，大学数学，2024，40(4): 86-91.

[4] 聂灵沼、丁石孙，代数学引论 [M]，北京：高等教育出版社，第 2 版，2009.11. 139-139.

[5] Serge Lang, Algebra, New York: Springer-Verlag, third edition, 2002. 173-180.

[6] Serge Lang, Linear algebra, New York: Springer-Verlag, third edition, 2004. 245-247.