

一种实用航班座控自适应随机逼近算法

吴国华

中国国际航空股份有限公司规划发展部，北京

摘要：针对无需模型预测和优化等先验知识的航空公司收益管理，本文提出了一种实用航班调舱的自适应随机逼近算法，该方法采用航班子舱的旅客出行人数来迭代更新近期航班舱位的保护水平，消除市场扰动影响，用随机逼近理论来证明迭代更新舱位保护水平的自适应逼近算法的收敛性。用模拟仿真方法进行算法对比验证，该方法不需要太多先验知识，算法迭代简单和实用，实时性强，并把该算法应用到航空公司北京-成都的航班调舱上，表明该算法有效性，可以更好匹配市场，满足旅客需求，提高航空公司的收益。

关键词：航空公司收益管理；舱位嵌套保护水平；座位控制；自适应辨识算法；随机逼近；全局渐进收敛性

A Practical Adaptive Stochastic Approximation Algorithm for Flight Booking Limit

Guohua Wu

Planning and Development Department, Air China Limited, Beijing

Abstract: Subject to the airline revenue management without prior knowledge of model prediction and optimization, this paper proposes a practical adaptive stochastic approximation algorithm for flight fare class booking limit. This method uses historical goshow of passengers in flight fare class to automatically update the associated protection level of recent flight fare class iteratively and eliminate the impact of market disturbance. At the same time, the stochastic approximation theory is used to prove the convergence of the adaptive approximation algorithm for updating the flight fare class protection level. The simulation method is used to compare and verify the algorithm. The algorithm has advantages of less prior knowledge, simple iteration and being practical, and the real-time performance is good, which is more in line with the actual situation. When the algorithm is applied to the flight from PEK to CTU of the airline, The results show that the algorithm is effective and can better match the market, meet the needs of passengers and improve the earnings of airlines

Keywords: Airline revenue management; Nested protection level; Booking limit; Adaptive identification algorithm; Stochastic approximation; Globally asymptotic convergence

1 引言

收益管理(Revenue Management)是航空公司有效管理旅客需求的手段和工具,也是航空公司提高收入的法宝。众所周知,飞机舱主要分为头等舱、商务舱、经济舱物理舱位,各个物理舱位的座位布局和服务都各有不同。为了适应各类市场旅客的不同需求,航空公司对物理舱位进行细分成不同票价不同服务限制的子舱,以满足不同价格敏感度和不同服务需求的旅客,从而吸引更多旅客,提高航空公司的收益。舱位控制的工作核心在于保护高价舱位的机票(座位)不被低价舱位旅客占据。所采取的手段就是对低价舱位进行订座限制BL (booking limit)或舱位控制,相当于为高票价舱位保留更多座位,称为舱位保护水平PL (Protection Level),可以分为分离式(Partitioned)即非嵌套结构以及嵌套式NP (Nested Protection level)结构两种。如表1所示,假如有从高到低Y、B、M三个子舱位,价格分别为1000、750、500,此飞机总座位数为100个,在分离式结构下,订座限制分别是25、30、45,在嵌套式结构下,保护水平为各舱位及更高所有舱位的可销售座位数之和。保护水平与订座限制存在对应关系,如表1所示。分离式结构的不足显而易见,航空公司希望所有座位都可以卖出好价格,然而在分离式结构下,旅客购票时,高价舱由于售罄而不能挤占低价舱位从而造成损失,嵌套式结构则避免了这种情况。因此,如今航空公司收益管理实践中广泛使用嵌套舱位控制方法。

表1. 舱位控制 (BL) 和嵌套保护水平 (NP)

| 舱位 | 票价 | 需求 | 分离式BL | 嵌套式保护水平NP | 嵌套式BL |
|----|------|----|-------|-----------|-------|
| Y | 1000 | 25 | 25 | 25 | 100 |
| B | 750 | 30 | 30 | 55 | 75 |
| M | 500 | 45 | 45 | 100 | 45 |

航空公司座位控制是管理打折票价开舱和关舱,希望座位能卖出更高价格,使总收入最大化。由于航空旅行需求不稳定性、随机性以及票价的波动、旅客个性化,竞争替代品等因素,收益管理问题变得非常复杂,所以航空公司收益管理一直是管理科学和运筹学研究领域的一个热点,尽管很多简化模型和启发式的应用已经在许多航空公

司得到广泛地应用,但目前还没有一种运筹学模型能够成功地处理所有这些复杂性。著名学者Barnhart等人切描述了20世纪80年代初以来收入管理研究的演变和综述,McGill和van Ryzin(1999) [2] 全面回顾收入管理的文献,重点关注预测和优化模式的发展。Littlewood(1972) [3] 最早发表关于航空公司座位分配的研究报告,提出接受折扣机票预订请求的Littlewood规则,即在两个票价等级的情况下,只要折扣机票预订的收入大于未来全价机票的预期收入,这一规则被航空公司座控广泛采用,两个票价等级的需求是独立的,并且从票价低到高顺序预订,得到最优的座位分配。Belobaba(1989)[4]开发了用于两个以上舱位嵌套保护水平(NP)和订座限制(BL)的启发式算法,该预期边际座位收入(EMSRa)启发式算法得到广泛关注。随后,Curry(1990)[5]提出了确定多等级票价最优舱位保护水平和嵌套订座限额的方法。Brumelle等人(1990)[6]和Wolmer(1992)[7]也独立推导相似的多等级嵌套航班舱位问题的最优解。Belobaba(1992)[8]随后开发出基于EMSRa座位保护模型的更优EMSRb启发式算法版本,Belobaba和Weatherford(1996)[9]公布了算法细节,在EMSRb模型中,相对于给定的较低等级舱位,所有较高等级联合舱位的保护水平是根据联合需求概率分布预测和加权舱位价格平均水平计算得到。目前大多数航空公司RM系统都使用EMSRa、EMSRb或其变体,30多年来,预期边际座位收入(EMSR)一直被用作航班舱位控制的航空业标准。

在传统计算舱位保护水平的算法中,一般将历史航班旅客预订数据通过预测和优化程序来为下一个将出发航班的调整舱位参数,在收益管理的早期,航空公司座控人员依据航班统计数据凭人工经验和判断来调整舱位,没有精力去收集航班多维信息,依靠预测和优化循环来调整子舱位保护水平,大多数分析师很难精确猜测收益最大化的舱位保护水平,仅简单观察历史航班数据直接更新下一个出发航班的预订策略参数,但这是一个很好思路和合理策略,这正好利用随机逼近优化算法,可以成为该算法的一个很好实际应用案例,因为航

班舱位保护水平的函数值是在类似于随机噪声存在的市场扰动情况下计算得到的，需要使用随机过程的模型和理论。在随机逼近理论上，Robbins和Monro(1951) [10] 首次提出过零点的随机估计，开创了随机逼近研究的先河，此算法被称为RM算法。随后Kiefer和Wolfowitz(1952) [11] 也首次研究最大值点的随机估计，后来被称为KW算法。这些算法被应用到自动控制、统计学、运筹学和经济学许多领域 [12]，Lai(2003) [13] 对这个主题的进行很详细综述，回顾了Robbins对随机逼近的贡献，概述了相关的研究进展。到目前计算最佳航班舱位保护水平，为数不多的研究使用了随机近似方法，van Ryzin和McGill(2000) [14] 开发了一种航空公司自适应座控参数更新随机逼近方法，这种方法与Brumelle和McGill(1993) [15] 的最佳保护水平应满足的条件密切相关，它依赖于从预订记录数据中观察容易确定舱位订座事件概率，采用RM随机逼近多变量算法来迭代更新保护水平，证明了提出的算法几乎肯定地收敛于最优的舱位保护水平，并且得到了收敛速度的边界，但该方法获得策略的性能不一定是最优的。Kunnumkal和Topaloglu(2008) [16] 也使用了随机逼近理论，利用问题的动态规划公式，扩展到许多凸的价值函数且最优座控策略的问题，每步迭代方向与值函数的随机梯度有关，值函数的随机梯度用在设置单一航段的座控决策，是一种适用于离散需求分布的方法，保证座控策略收敛性。在收益管理实践中，由于旅客市场随时变化和飞机最大可用座位数受限等一些问题，针对时变或慢时变参数问题，郭雷 [17] 提出了一种计算简单、容易实现的最小均方误差(LMS)参数估计方法，在理论上证明其算法稳定性和收敛性；针对参数受限问题，张蓝天等 [18] 提出了一种参数饱和受限模型(S-模型)的自适应辨识算法，证明其算法全局收敛性，并创新应用到司法量刑实践，准确反映量刑要素的影响和变化 [19]。

航空公司收益管理中座控人员调舱是最日常、最重要和最繁琐的工作，对于提升航空公司效益有重要意义。本文工作有如下的贡献：第一，本文为航空公司动态实时调舱设计一种简单的自适应随机

逼近算法，可大大提升工作质量和效率；第二，此自适应算法设置舱位限制要优于著名的EMSRb方法，同时不需要模型预测和优化先验知识；第三，此算法理论上可保证收敛快、稳定性好，简单实用，可实时在线使用，可快速跟踪市场变化。在实际工作中验证算法的有效性。

2 数学模型和假设条件

中国航空公司大部分航线是点对点的单一航段，例如北京到上海、北京到成都等等，国航舱位按有物理区别分为头等舱F (A)、公务舱C (JDZR)、超经G (E)和经济舱Y (UVWT)四种，在经济舱Y中从逻辑上分为经济全价Y、基础折扣B (BMU)、优选折扣H (HQV)、特惠折扣W (WS)、超值特价T(TLPKN)等十几个没有物理区别的折扣子舱。本文研究是在飞机同一物理舱位座位池中多种逻辑子舱座位分配问题，由于没有物理区分，票价不同只有在退改签上人为设置不同条件，可以串卖实现嵌套销售。为了研究方便，做如下假设：

假设1 (1)所有订座是针对单一航段，机票价格受政府指导和市场调节，订座人数不能超过飞机座位容量。(2)旅客需求是随机、互相独立，舱位等级有不同使用条件。(3)不考虑采用超售手段来弥补因旅客退改签造成座位损失。(4)采用座位嵌套策略，高舱位订座可以占用低舱位。

上述假设简化了航空公司收益管理的座控问题，这里定义随机变量 x_i 表示旅客对于第 i 个子舱的需求，舱位的容量 c ， X_1, X_2, \dots, X_{k+1} 表示 $k+1$ 个子舱位的需求， f_i 表示对应的子舱 i 的价格，一般来说 $f_1 > f_2 > \dots > f_{k+1}$ 。一般假设旅客需求随机变量为互相独立的，其概率分布是连续，同一航班的旅客需求向量 X_1, X_2, \dots, X_{k+1} 是平稳的，其联合概率分布函数在一定时间内是不变的，一定会存在着子舱的最优分配使得航班收益最大化，但是最优舱位分配是市场销售政策、票价水平和旅客需求以及宏观经济环境构成复杂供求函数关系，一般很难用简单模型来刻画这种复杂关系，倒不如直接用实际销售数据来过滤市场波动从而得到市场匹配真实旅客需求。

本文研究这类单一航段的航班子舱分配限额问

题, 从子舱1到子舱k的座位数量之和 θ 定义为子舱嵌套保护水平, 有 $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \dots \leq \theta_k \leq c$, 余额就是最低票价子舱k+1的配额。定义子舱上座事件的嵌套序列:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_1[\theta, X] &= \{X_1 > \theta_1\}; \\ \mathbb{E}_2[\theta, X] &= \{X_1 > \theta_1, X_1 + X_2 > \theta_2\}; \\ &\dots \\ \mathbb{E}_k[\theta, X] &= \{X_1 > \theta_1, X_1 + X_2 > \theta_2, \dots, X_1 + X_2 + \dots + X_k > \theta_k\} \end{aligned}$$

设向量 $\theta_1 = (\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k)$ 表示子舱嵌套最优的保护水平的集合, $x_1(n), x_2(n), \dots, x_{k+1}(n)$ 是随机变量 X_1, X_2, \dots, X_{k+1} 的第n次迭代值。航空公司收益问题是追求总收益最大化, 定义总收益:

$$R(n) = \sum_{i=1}^{k+1} f_i x_i(n) \quad (1)$$

收益管理的问题实际上是数学规划问题

$$\max [f_1 x_1(n) + f_2 x_2(n) + \dots + f_{k+1} x_{k+1}(n)] \quad (2)$$

s. t.

$$\begin{aligned} x_1(n) + x_2(n) + \dots + x_{k+1}(n) &\leq c \\ f_1 &\geq f_2 \geq \dots \geq f_k \geq f_{k+1} \\ x_i(n) &\sim N(\mu_i, \sigma_i^2) \quad i = 1, 2, \dots, k+1 \end{aligned}$$

很显然, 最大收益是

$$x_1(n) = c, \quad x_2(n) = 0, \quad \dots, \quad x_{k+1}(n) = 0, \quad (3)$$

以概率很小形式取得最优值 $f_1 c$ 。同理类推可以以概率较大形式取得如下的平均期望收益, 即是

$$x_1(n) = \mu_1, \quad x_2(n) = \mu_2, \quad \dots, \quad x_{k+1}(n) = \mu_{k+1}, \quad (4)$$

期望的平均收益

$$\mathbb{E}[R(n)] = \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{k+1} f_i x_i(n)\right] = \sum_{i=1}^{k+1} f_i \mu_i \quad (5)$$

$$\leq \sum_{i=1}^k (f_i - f_{k+1}) \mu_i + c f_{k+1},$$

Belobaba(1989)和Brumelle和McGill(1993)提出并采用EMSRa或b方法来确定子舱保护水平。最著名的EMSRa的两舱位分配的函数(Φ 为舱位1的概率分布函数)

$$\Phi(X \geq \theta_1) = f_2 / f_1, \quad (6)$$

在EMSRb方法中, 设有k+1个相互独立的不同等级票价 f_i , 旅客需求 d_i 服从正态分布 $d_i \propto N(\mu_i, \sigma_i^2)$, 前k个舱位汇聚需求也是正态分布, 其均值 $\mu_{(1,k)} = \sum_{i=1}^k \mu_i$, 方

差 $\sigma_{(1,k)}^2 = \sum_{i=1}^k \sigma_i^2$, 平均票价 $f_{(1,k)} = \mu_{(1,k)}^{-1} \sum_{i=1}^k \mu_i f_i$, 则联合舱位保护水平

$$\theta_k = \mu_{(1,k)} + \sigma_{(1,k)} \Phi^{-1}[1 - f_{k+1}/f_{(1,k)}]$$

等价于

$$\frac{\theta_k - \mu_{(1,k)}}{\sigma_{(1,k)}} - \Phi^{-1}[1 - f_{k+1}/f_{(1,k)}] = 0 \quad (7)$$

最终得到舱位订座限制为 $BL_k = c - \theta_{k-1}$ 。航班总的收入: $R = \sum_{i=1}^k f_i (\theta_i - \theta_{i-1}) + f_{k+1} \theta_{k+1}$ 。

此方法前提要知道各个子舱的旅客需求概率分布先验知识, 一般把历史上同一航班的子舱出行人数统计成为正态分布, 用历史数据来预测合适的子舱座位分配, 实现收益的最大化。旅客需求是个动态过程, 正态分布函数很难精确刻画旅客动态变化需求, 用统计特性静态数据去实时调整每天都随着市场变化的舱位限制, 显得力不从心, 但到目前为止这是解决航空公司收益管理问题的一种最流行算法, 在实践中大量使用。

我们把(6)式和(7)式方程求解等价成数学零值求解问题, 在数学上用随机逼近RM方法[10]来迭代求解下面连续函数的根 θ ,

$$\bar{y} = M(x_n) - \varepsilon_n \quad (8)$$

其中 ε_n 为不可测随机误差。用牛顿梯度法求解为

$$x_{n+1} = x_n - \frac{M(x_n)}{M'(x_n)} + \frac{1}{M'(x_n)} \varepsilon_n \quad (9)$$

假设 $x_n \rightarrow \theta, M(x_n) \rightarrow 0, M'(x_n) \rightarrow M'(\theta)$, 那么从(8)式要求 $\varepsilon_n \rightarrow 0$, 这是对于独立同分布有方差的随机变量 S_n 是不可能的。为了平均掉随机误差的影响, 构造RM算法提出方法迭代如下:

$$x_{n+1} = x_n - a_n \bar{y} \quad (10)$$

对于构成合适 $a_n > 0$ 序列, 它被要求有很好的收敛性[12]。所以把(6)式和(7)式求解舱位联合保护水平(NP)的公式总结写成一般形式为

$$\begin{aligned} M(x_n) &= x_n - \theta = x_n - [\mu_{(1,k)} + \sigma_{(1,k)} \Phi^{-1}(1 - f_{k+1}/f_{(1,k)})] \\ &= \sigma_{(1,k)} \left[\frac{x_n - \mu_{(1,k)}}{\sigma_{(1,k)}} - \Phi^{-1}(1 - f_{k+1}/f_{(1,k)}) \right] \end{aligned} \quad (11)$$

令 $y_n = \theta + \varepsilon_n$, 由(8)式得

$$\bar{y}_n = x_n - (\theta + \varepsilon_n) = x_n - y_n \quad (12)$$

把(12)式代入(10)式得到舱位保护水平递推公式

$$\bar{y}_n = x_n - (\theta + \varepsilon_n) = x_n - y_n \quad (13)$$

其中 $y_n = \theta + \varepsilon_n$ 为舱位保护水平的观测值, 有 $\mathbb{E}(y_n) = \theta, \text{Var}(y_n) = \sigma^2$:

$$x_{n+1} - \theta = (1 - a_n)(x_n - \theta) + a_n \varepsilon_n \quad (14)$$

由于很难用数学模型来精确描述旅客实际需求的难题, 由(13)式递推算法知本算法不需数学模型, 它实质上式当前的预测值与观测值的凸组合, 用每天观测到各子舱旅客人数来逼近子舱的最佳分配。

本文提出两步优化方法, 第一步, 基于历史航班数据, 采用EMSRb方法的静态数据去设定中短期的舱位限制, 去控制市场销售。第二步, 根据市场销售的实际旅客上座的情况, 用自适应随机逼近算法(13)式从高舱位 θ_1 到低舱位 θ_k 分别求得最大的嵌套的NP舱位保护水平 $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_k$, 依据计算出舱位订座限制为:

$$\begin{aligned} BL_1 &= c \\ BL_i &= c - \theta_{i-1}, \quad i = 1, 2, \dots, k+1 \end{aligned} \quad (15)$$

如果按上述的BL实时调舱, 达成航空公司的有效动态精确座控的目的。

3 自适应随机逼近算法

设飞机有 $k+1$ 个子舱, 每个子舱旅客需求为 $X_i, i=1, \dots, k+1$, 对旅客订座人数 X_i 的递推 n 次的估计为 $\hat{X}_i(n)$, 实际的订座人数是 Y_i , 随市场(时间)变化而变化, 容易得到它的第 n 次观测值, 由上节EMSR公式构成了待求解的方程, 使用RM算法来求解此舱位保护水平NP方程的零值。由(13)式知Dvoretzky类型[20]的递推随机逼近算法如下:

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(n+1) &= (1 - a_i(n))\hat{x}_i(n) + a_i(n)y_i(n), \quad i = 1, 2, \dots, k \\ &= \hat{x}_i(n) + a_i(n)[y_i(n) - \hat{x}_i(n)], \quad n = 1, 2, \dots, \end{aligned} \quad (16)$$

其中子舱 i 的订座观测值是 $y_i(n) = \theta_i + \varepsilon_i(n)$, $\varepsilon_i(n)$ 是市场扰动, 一般看成有界的iid零均值噪声干扰, 一般得到先验统计的信息如 $V_{i0}^2 = \mathbb{E}[x_i(0) - \theta_i]^2, \mathbb{E}[\varepsilon_i] = 0$,

$\text{Var}[\varepsilon_i] = \sigma_i^2$ 。 $a_i(n)$ 是一个如下设计的数列:

$$a_i(n) = \frac{1}{n+1+\sigma_i^2/V_{i0}^2} \quad (17)$$

代入(16)式得到

$$\hat{x}_i(n+1) - \theta_i = [1 - a_i(n)][\hat{x}_i(n) - \theta_i] + a_i(n)\varepsilon_i(n) \quad (18)$$

把(18)式经过 $n+1$ 次循环后得到初始均方差的形式

$$\begin{aligned} \hat{x}_i(n+1) - \theta_i &= [1 - a_i(n)][\hat{x}_i(n) - \theta_i] + a_i(n)\varepsilon_i(n) \\ &= [1 - a_i(n)][1 - a_i(n-1)][\hat{x}_i(n-1) - \theta_i] \\ &\quad + a_i(n-1)\varepsilon_i(n-1) + a_i(n)\varepsilon_i(n) \\ &= \left(\prod_{k=1}^n [1 - a_i(k)] \right) [\hat{x}_i(0) - \theta_i] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_i(k)\varepsilon_i(k) \prod_{j=k+1}^n [1 - a_i(j)] \end{aligned} \quad (19)$$

两边取数学期望得到

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[\hat{x}_i(n+1) - \theta_i] &= \left(\prod_{k=1}^n [1 - a_i(k)] \right) \mathbb{E}[\hat{x}_i(0) - \theta_i] \\ &\quad + \sum_{k=1}^n a_i(k)\mathbb{E}[\varepsilon_i(k)] \prod_{j=k+1}^n [1 - a_i(j)] \\ &= \left(\prod_{k=1}^n [1 - a_i(k)] \right) \mathbb{E}[\hat{x}_i(0) - \theta_i] \end{aligned} \quad (20)$$

再取极限得到

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{x}_i(n+1) - \theta_i] \\ = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\prod_{k=1}^n [1 - a_i(k)] \right) \mathbb{E}[\hat{x}_i(0) - \theta_i] \end{aligned} \quad (21)$$

由(17)式推出

$$1 - a_i(k)$$

$$= 1 - \frac{1}{k+1+\sigma_i^2/V_{i0}^2} = \frac{k+\sigma_i^2/V_{i0}^2}{k+1+\sigma_i^2/V_{i0}^2} = \frac{a_i(k)}{a_i(k-1)} \quad (22)$$

那么

$$\begin{aligned} & \prod_{k=1}^n [1 - a_i(k)] \\ &= \prod_{k=1}^n \frac{a_i(k)}{a_i(k-1)} = \frac{a_i(n)}{a_i(0)} = \frac{V_{i0}^2 + \sigma_i^2}{(n+1)V_{i0}^2 + \sigma_i^2} \end{aligned} \quad (23)$$

所以由(20)式可得

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\hat{x}_i(n+1) - \theta_i] \\ &= \frac{V_{i0}^2 + \sigma_i^2}{(n+1)V_{i0}^2 + \sigma_i^2} \mathbb{E}[\hat{x}_i(0) - \theta_i] = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \end{aligned} \quad (24)$$

此算法的收敛性是关于迭代次数的无穷小量，有较好的收敛性，保证算法稳定。

4 算法收敛性证明

航空市场波动性很大，市场在一年中有淡季和旺季、平时和节假日、工作日和周末之分，航空公司座控是要随市场和竞争环境不断变化而变化，现实是具有时变特性。理论上做一些技术处理，再时间分段处理，使得在每段时间内市场是相对平稳或慢时变。因此假设市场是平稳的情况下，提出的自适应随机逼近迭代算法来确定舱位保护水平，由(16)式知

$$\hat{x}_i(n+1) = \hat{x}_i(n) + a_i(n)[y_i(n) - \hat{x}_i(n)] \quad (25)$$

这里我们给出此算法的收敛性定理。

定理1 (收敛性定理) 假设为iid随机噪声和设计增益因子满足下列的要求:

$$\text{I. } \mathbb{E}[\varepsilon_i^2(n) | X_i(1), X_i(2), \dots, X_i(n)] \leq \sigma_i^2$$

$$\text{II. } a_i(n) = \frac{1}{n+1+\sigma_i^2/V_{i0}^2},$$

$$i = 1, 2, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots$$

那么算法具有均方误差收敛性

$$\mathbb{E}[\hat{x}_i(n) - \theta_i]^2 = \frac{V_{i0}^2 \sigma_i^2}{nV_{i0}^2 + \sigma_i^2} = \mathcal{O}\left(\frac{1}{n}\right) \quad (26)$$

意味着几乎处处收敛

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}[\hat{x}_i(n)] = \theta_i, \quad \text{w. p. 1} \quad (27)$$

证明: 给(18)式平方后去取数学期望得到:

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[\hat{x}_i(n+1) - \theta_i]^2 \\ &= [1 - a_i(n)]^2 \mathbb{E}[\hat{x}_i(n) - \theta_i]^2 + a_i^2(n) \mathbb{E}[\varepsilon_i^2(n)] \end{aligned} \quad (28)$$

定义随机的Liapounov函数,

$$V(n) = \mathbb{E}[\hat{x}_i(n) - \theta_i]^2$$

那么有

$$\begin{aligned} V(n+1) &= [1 - a_i(n)]^2 V(n) + a_i^2(n) \sigma_i^2 \\ &= V(n) - 2V(n)a_i(n) + [V(n) + \sigma_i^2]a_i^2(n) \end{aligned} \quad (29)$$

为了让V(n+1)取得的最小值，易知

$$a_i(n) = \frac{V(n)}{V(n) + \sigma_i^2} \quad (30)$$

此时，由(29)式得

$$V(n+1) = V(n) - a_i(n)V(n) = \frac{V(n)\sigma_i^2}{V(n) + \sigma_i^2} \leq V(n) \quad (31)$$

说明V(n)是个上鞅结构。从(31)式得到一等差数列

$$\frac{1}{V(n+1)} = \frac{1}{V(n)} + \frac{1}{\sigma_i^2} \quad (32)$$

根据等差数列求和公式

$$\frac{1}{V(n)} = \frac{1}{V(0)} + n \frac{1}{\sigma_i^2} = \frac{\sigma_i^2 + nV(0)}{V(0)\sigma_i^2} \quad (33)$$

最后得到Liapounov函数显示公式

$$V(n) = \frac{V(0)\sigma_i^2}{\sigma_i^2 + nV(0)} = \frac{V_{i0}^2 \sigma_i^2}{\sigma_i^2 + nV_{i0}^2} \quad (34)$$

把上式代入(30)式得到

$$a_i(n) = \frac{V(n)}{V(n) + \sigma_i^2} = \frac{1}{(n+1) + \sigma_i^2/V_{i0}^2} \quad (35)$$

从而此算法的收敛性定理得证。

5 案例仿真验证和算法比较

在这一节中，采用蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟来仿真本文自适应算法在稳态需求情况下性能，静态确定航班座控方法采用具有代表性方法EMSRb优化方法，来确定航班座控销售数据限制，在动态调舱方面比较两种自适应算法(本文方法和Van Ryzin的方法[14])在不同初始条件、客运率和旅客需求概率分布等情形下的收敛性、稳定性和期望总收益。在下节给出来自航空公司真实的航班数据，验证本文提出算法的优越性、实用性。

5.1 仿真数据

在航空公司收益管理模型中最有名的模型是EMSRb，本文的市场订座人数数据采用EMSRb优化方法，用蒙特卡罗(Monte Carlo)模拟产生销售数据，再采用本文的自适应递推算算法来确定嵌套的舱位保护水平，用这种仿真方案能很好模拟旅客的销售。EMSRb是在基于已知旅客需求概率分布的采用混合概率分布后依据两等级舱位边际座位收益最大原则计算最优的保护水平。设有 $k+1$ 个相互独立的不同票价等级 f_i ，旅客需求 d_i 服从正态分布 $d_i \sim N(\mu_i, \sigma_i^2)$ ，前几个舱位 $i = 1, 2, \dots, k$ 汇聚需求也是正态分布，其 k 个舱位联合的需求特性为均值 $\mu_{(1,k)}$ ，方差 $\sigma_{(1,k)}^2$ ，平均票价 $f_{(1,k)}$ ，则联合舱位保护水平：

$$\theta_i = \mu_{(1,i)} + \sigma_{(1,i)} N^{-1}[1 - f_{i+1}/f_{(1,i)}] \quad (36)$$

我们用 $X_i \sim \theta_i^2$ 产生模拟用的市场销售数据，旺季用出行旅客概率分布在(0.5,1)模拟，淡季用出行旅客概率分布在(0,0.5)模拟，平季用出行旅客概率分布在(0,1)模拟。用提出的算法(16)式来迭代计算出舱位的嵌套保护水平 $x_i(n)$ ，最终得到舱位订座限制 $BL_i(n) = c - x_{i-1}(n)$ 。航班期望总的收入： $= \sum_{i=1}^k f_i(x_{i+1} - x_i) + f_{k+1}x_{k+1}$ 。为了方便算法比较，模拟的航班数据采用van Ryzin(2000)(数据统计特征见[14])的4个子舱位即 $m = 4$,参数如表2所示，基于固定机票价格和旅客需求统计，根据EMSRb优化方法确定了3个嵌套保护水平。我们根据不同场景进行仿真，一年销售有旺季、淡季、平季之分，对案例的航班季度样本进行了100次采样，根据采样数据

进行仿真，仿真图只显示90天的嵌套舱位保护水平和总收入仿真数据。

5.2 自适应算法对比验证

我们分五个场景分别仿真实验，按需求淡旺和仿真初值大小选取组合成四个场景以及不温不火平季第五个市场场景，见表3所示。采用蒙特卡罗模拟方法对100个样本进行了采样，在每个图显示了场景的三个数据图，上图是期望总收益，中图是本文算法的子舱保护水平的迭代轨迹，下图是用Ryzin和McGill方法同等条件下仿真结果。

表2. EMSRb子舱控制

| 舱位 | 票价 | 均值 | 标准差 | 联合均值 | 联合标准差 | EMSRb的 NP | 调舱 BL |
|----|------|------|------|------|-------|-----------|-------|
| 1 | 1050 | 17.3 | 5.8 | 17.3 | 5.8 | 17 | 119 |
| 2 | 567 | 45.1 | 15.0 | 62.4 | 16.1 | 52 | 102 |
| 3 | 527 | 73.6 | 17.4 | 136 | 23.7 | 131 | 67 |
| 4 | 350 | 19.8 | 6.6 | NA | NA | NA | 0 |

表3. 保护水平的设定开始初值

| 子舱等级 | 初值小 | 初值大 |
|------|-----|-----|
| 0 | 15 | 65 |
| 35 | 110 | 210 |

由于初值选择对算法的收敛速度和算法特性有影响，把市场淡季旺季和初值大小作为场景分类，图1是淡季小初值的仿真结果，图2淡季大初值的仿真结果，图3旺季小初值的仿真结果，图4旺季大初值的仿真结果。

图1和图2两个是模拟旅客需求淡季市场，旅客需求呈全年的低位，从两个图中可以明显看出较高舱位需求（图中有彩色带标注的实线）低于全年平均需求（图中红色虚线）特点，最低舱位需求（图中在横轴附近黑实线）反而高于全年平均需求。两种方法呈现一个快一个慢不同收敛特点，通过两种算法仿真比较说明本文方法平稳性稳定性较好，收敛速度快；Ryzin的方法波动大，收敛慢，同时给最低舱位分配更多座位，直接影响航班总收益，它的收益基本低于本文方案。通过仿真研究可以看出初值设定对算法稳定影响有限，前10步波动性大点，图中未标出。当市场处于淡季时，两种算法都能给较高舱位以平均值更小值，给最低舱位以平均

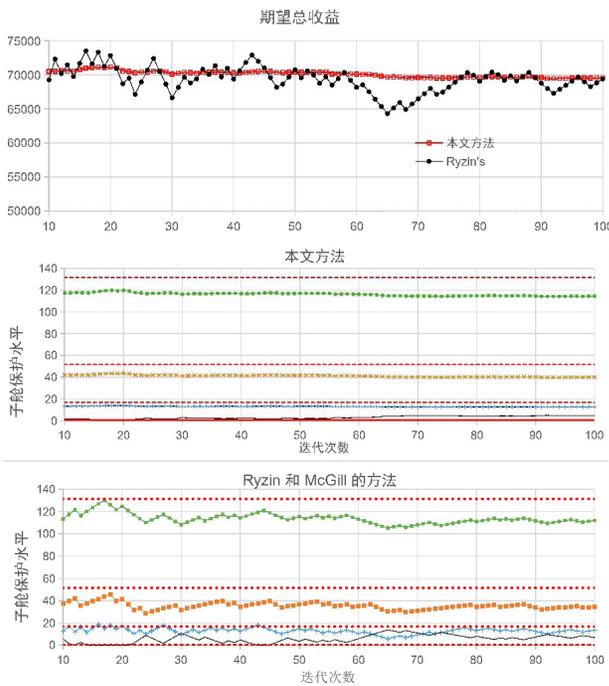


图1. 市场淡季初值取小的需求呈正态分布场景

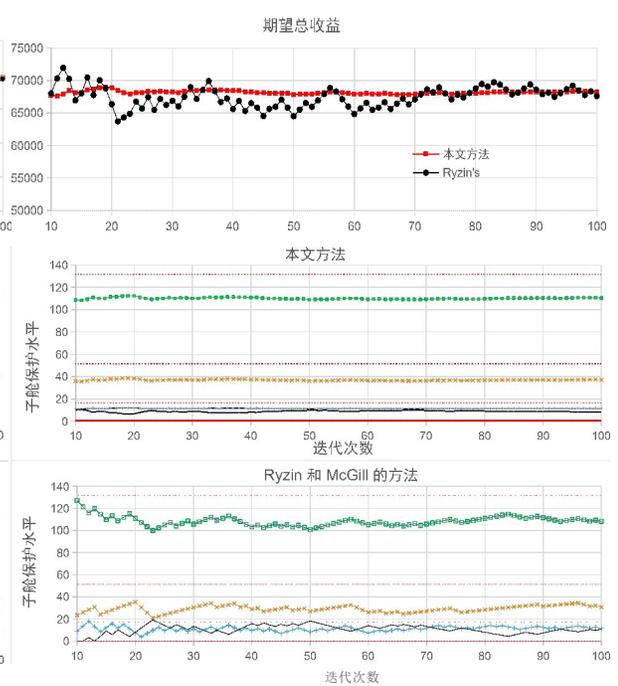


图2. 市场淡季初值取大的需求呈正态分布场景

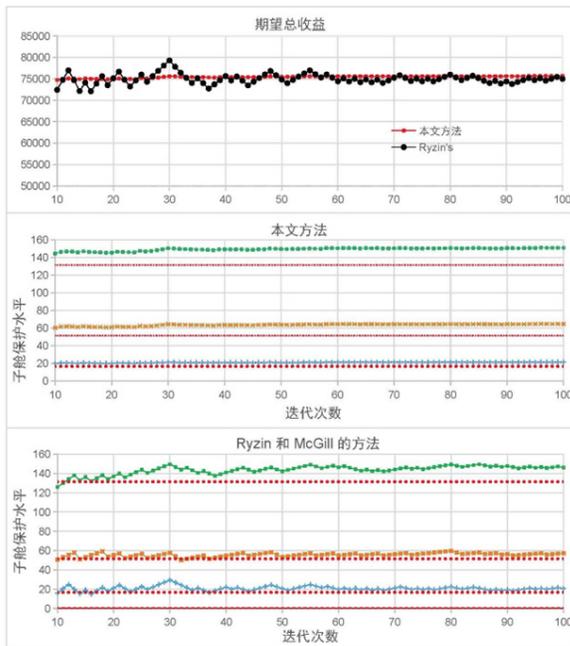


图3. 市场旺季初值取小的需求呈正态分布场景

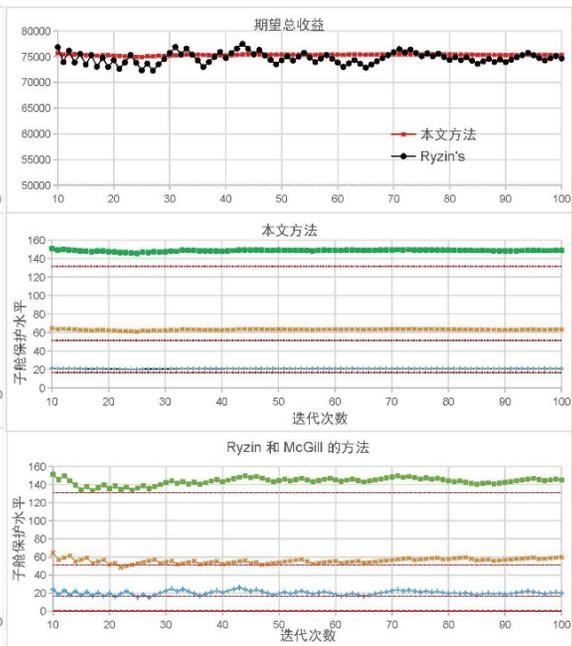


图4. 市场旺季初值取大的需求呈正态分布场景

值更大值，都能适应市场变化，给更多低价舱位来刺激市场需求，与座控人员的经验一致，也说明算法的合理性。

图3和图4都是模拟处于旺季市场，旅客需求呈

全年的高位（图中有彩色带标注的实线），高于全年的平均水平（图中红色虚线），抑制了最低舱位分配（图中在横轴附近黑实线），两个算法都没有给最低舱位分配座位，提高航班收益。选取初值大

小也和淡季市场场景一样对两个算法影响不大，当市场处于旺季时两个算法期望总收益大体相当，算法平稳性收敛特性也相似，说明两个算法对于旺季市场的收益有良好作用，也说明收益管理在旺季市场更能发挥更大作用。通过对旺季市场仿真研究，发现两种算法都能给较高舱位以平均值更大值，给最低舱位以平均值更小值，说明算法有良好市场适应性，随市场变化而变化，抓住市场机遇提高航班收益。

图5是模拟平时平稳市场特点，没有明显淡旺季，属于不温不火平季市场。仿真研究表明本文算法（图中有彩色带标注的实线）很快收敛到平均值（图中红色虚线），更好说明本文算法的渐进收敛性，文中证明收敛速度是。Ryzin的算法的参数轨迹曲线一般在参数真值之下，这样会给期望总收益带来不利影响，算法收敛也慢点，但图5中也可以看出本文算法收敛速度快、平稳性好，误差小的特点。

6 在实际应用中算法修正和实例验证

在实际应用场景中，在算法设计中要充分体现舱位受飞机容量物理限制和市场波动影响，在递推算法在不影响算法特性前提下应做适当修正，使得

算法更加实用。

6.1 飞机最大可订座容量的限制

假设飞机舱位有可卖最大座位数为 c ，一般受物理舱位的实际空间限制，比如说头等舱F舱十几座，在飞机头部，空间较大，可以平躺休息，满足VIP客人需求；公务舱C舱有几十个，在飞机前舱，空间略小，也可平躺，满足高端商务旅客需求。经济舱Y舱多达几百个座位，位于飞机中后舱，空间最小，座位可调角度有限，满足旅客出行需求。在经济舱Y中从逻辑上分为经济全价Y、基础折扣B（B、M、U）、优选折扣H（H、Q、V）、特惠折扣W（W、S）、超值特价T（T、L、P、K、N）等五大舱位和十几个折扣子舱，这十几个折扣子舱最大可卖座位数为 c 。所有子舱位更新修正如下：

$$\hat{x}_i(n+1) = \min\{c, \hat{x}_i(n) + a_i(n)[y_i(n) - \hat{x}_i(n)]\},$$

$$n = 1, 2, \dots, \quad (37)$$

此算法也将收敛到 $\min(c, \theta_i)$ 。

6.2 增益因子更新原则

由于该算法只针对平稳情况，随着迭代次数

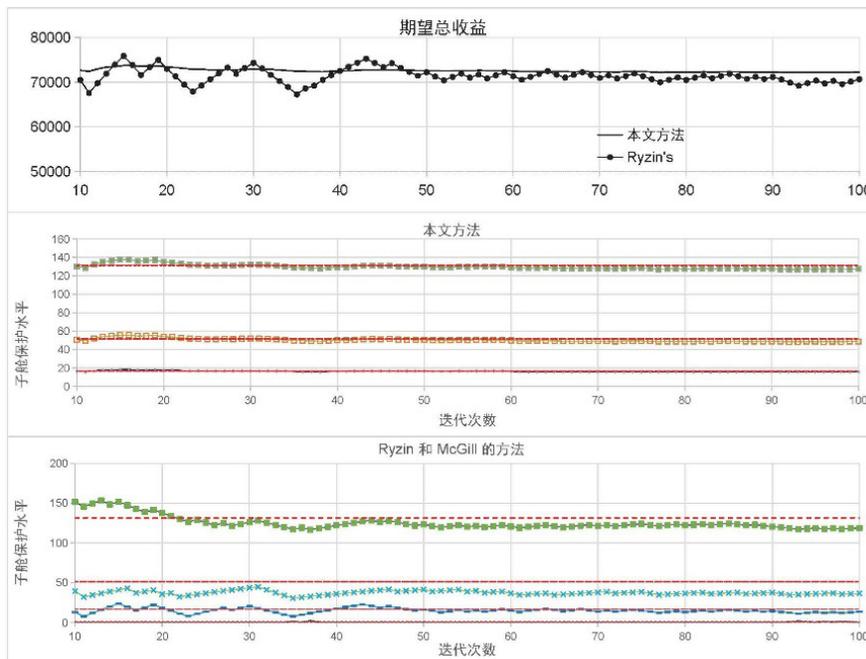


图5. 大初值平稳市场需求呈正态分布场景

增加, 增益因子逐渐收敛到很小值, 所以算法逐渐收敛到稳态值, 不会有大的变化。但是市场经常变化, 如淡旺季转换时, 我们采用参数期重新开始方法, 提高算法对市场的敏感性, 更新规则如下

$$a_i(n) = \begin{cases} a_i(n), & \text{如果 } n \leq 10, \\ a_i(0), & \text{否则} \end{cases} \quad (38)$$

6.3 时间周期的设定

在算法中隐含着时间周期设计问题, 如, 其中T为允许自行设定时间间隔, 座控人员根据市场变化规律可以自行设定合适时间间隔, 针对短期调舱, 在工作日和周末、公务和休闲旅客有不同出行规律, 时间周期可以设置为周; 针对中期调舱, 一年每个月也呈现旅客流不同规律, 粗略说冬春淡季和夏秋旺季, 时间周期可以按月设置; 针对长期调舱, 视野会更远期些, 如国家十五计划预期GDP年增长率和旅客出行的年增长率等等, 从航班统计数据看每年旅客流也呈现一些规律性, 对长期座控来说, 可以按年设置。所以航班座控人员针对航班长期、中期和上客期问题, 利用航班统计信息或经验来做中长期静态开仓和中短期动态调舱, 在本论文中为了验证算法的效果, 不失一般性, 航班时间间隔按天设置, 用短期调舱效果来验证算法的有效性。但实际上可以根据场景来设置时间间隔, 在本文中不讨论其他时间间隔设置以及算法的问题。

6.4 实际航班验证

本节数据采用航空公司北京到成都航班经济舱旅客成行实际数据, 航空公司经济舱Y从逻辑上分为十几个折扣子舱, 票价从全价票到四折票不等, 为了方便算法比较, 把十几个子舱合并成五个舱位即经济全价Y、基础折扣U、优选折扣V、特惠折扣W、超值特价T舱位。航班基本信息有航班号: CA1415 (北京-成都)、起飞时间: 0930、机型: A359、330、777、787, 统计日期: 20190701-20191101、航班总数: 123, 如表4所示, 表中折扣票价采用相对票价, 经济全价Y舱设定为单位值1, 各个舱位折扣票价就是在该舱位下

所有子舱的票价加权计算而得。根据表4共123个CA1415航班历史统计的数据, 通过联合正态分布计算公式计算嵌套舱位保护水平NP的均值和标准差以及采用见式(7)依据EMSRb优化原理方法得到嵌套舱位保护水平NP, 从而计算出此航班嵌套舱位订座限制BL的静态优化值即, 如表5所示, 航班座控人员可以用这些嵌套BL静态数据对该航班进行远期的舱位设限。

表4. CA1415航班数据的统计量

| 舱位 | 经济全价Y | 基础折扣U | 优选折扣V | 特惠折扣W | 超值特价T |
|------|-------|-------|-------|-------|-------|
| 均值 | 149 | 62 | 20 | 10 | 33 |
| 标准差 | 89 | 53 | 28 | 25 | 32 |
| 折扣票价 | 1 | 0.87 | 0.68 | 0.45 | 0.1 |

表5. EMSRb方法的(静态)嵌套订座限制(构型c=355)

| 嵌套保护水平 | θ_1 | θ_2 | θ_3 | θ_4 | θ_5 |
|-------------|------------|------------|------------|------------|------------|
| 嵌套舱位均值 | 149 | 207 | 228 | 238 | 271 |
| 嵌套舱位标准差 | 89 | 83 | 72 | 59 | 50 |
| 嵌套舱位相对票价 | 1 | 0.96 | 0.94 | 0.92 | NA |
| EMSRb 嵌套 NP | 49 | 161 | 231 | 311 | NA |
| 嵌套舱位BL | c | 306 | 194 | 124 | 44 |
| 分离舱位BL | 49 | 112 | 70 | 80 | 44 |

下面用自适应迭代算法实时调舱验证, 采用同一机型, 相同座位容量的CA1415航班实时调舱, 用图形展示订座限制的轨迹, 以期直观说明此算法的稳定性。选取机型B77W (两舱35座、经济舱355座位, 共390座)的航班CA1415为例来展示, 北京至成都、起飞时间09:30, 座控员可以用迭代数据BL作为上限逐渐进行调舱。用实际的历史舱位旅客成行数据计算迭代结果见图6, 从图6可以观察到各个舱位订座限制值(BL)收敛到稳态值, 把利用EMSRb计算得到静态数据即表5中分离舱位BL和自适应迭代算法得到分离舱位BL动态数据即图6对比, 列出静态数据 $BL_1 = 49, BL_2 = 112, BL_3 = 70, BL_4 = 80, BL_5 = 44$, 低舱位BL要高于本算法迭代数据, 相反高舱位要低, 这样设定会减少航空公司的收益, 说明本文动态算法在增加收益上会比EMSRb静态算法好, 与实际成行旅客人数更接近, 但如果迭代次数增加, 算法逐渐趋于稳定, 不能跟踪市场变化, 有不足之

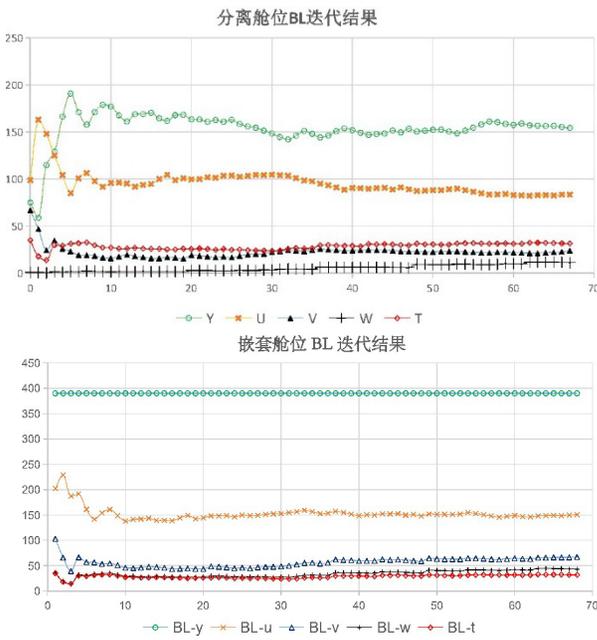


图6. 增益因子自动更新迭代算法结果(动态)

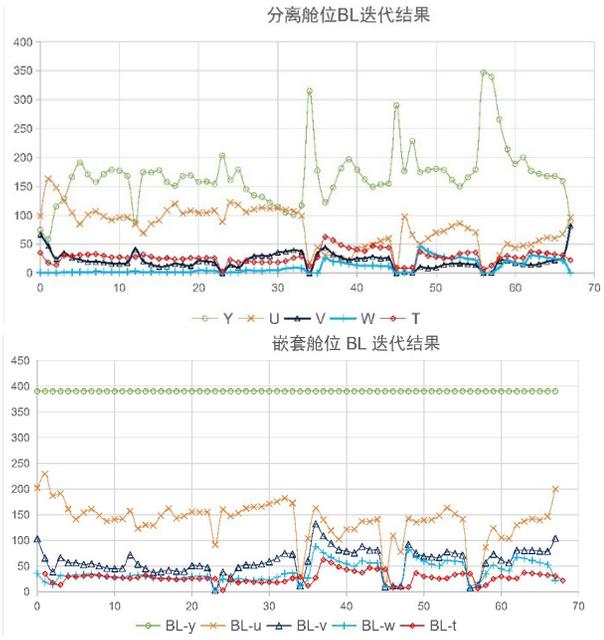


图7. 增益因子10天周期更新迭代算法结果(动态)

处。为了防止算法过早收敛而对市场变化不敏感，我们设计增益因子强制10天更新一次，使得算法保持与市场同步，图7显示增益因子强制10天更新的迭代结果，对比两个图可以看出图7中订座限制BL表现出周期性改变的特点，更好跟踪市场变化。

表6. 自适应随机逼近算法分离舱位(嵌套舱位)迭代结果

| 日期 | 航班 | 经济全价Y | 基础折扣U | 优选折扣V | 特惠折扣W | 特价折扣T |
|------------|--------|----------|---------|--------|--------|-------|
| 2019-10-10 | CA1415 | 180(355) | 88(151) | 23(63) | 9(40) | 31 |
| 2019-10-11 | CA1415 | 178(355) | 88(151) | 23(63) | 10(40) | 30 |
| 2019-10-12 | CA1415 | 161(355) | 89(152) | 24(63) | 9(39) | 30 |
| 2019-10-13 | CA1415 | 150(355) | 90(155) | 24(65) | 9(41) | 32 |
| 2019-10-15 | CA1415 | 165(355) | 89(153) | 22(64) | 10(42) | 32 |
| 2019-10-16 | CA1415 | 179(355) | 86(150) | 23(64) | 9(41) | 32 |
| 2019-10-17 | CA1415 | 347(355) | 85(148) | 22(63) | 9(41) | 32 |

表7. CA1415分离舱位(嵌套舱位)实际出行人数

| 日期 | 航班 | 经济全价Y | 基础折扣U | 优选折扣V | 特惠折扣W | 特价折扣T |
|------------|--------|----------|----------|---------|---------|-------|
| 2019-10-10 | CA1415 | 189(346) | 118(157) | 14(39) | 4(25) | 21 |
| 2019-10-11 | CA1415 | 166(313) | 88(147) | 45(59) | 4(14) | 10 |
| 2019-10-12 | CA1415 | 43(244) | 141(201) | 27(60) | 1(33) | 32 |
| 2019-10-13 | CA1415 | 59(347) | 123(288) | 22(165) | 51(143) | 92 |

| | | | | | | |
|------------|--------|----------|-------|-------|-------|----|
| 2019-10-15 | CA1415 | 303(352) | 0(49) | 0(49) | 0(49) | 49 |
| 2019-10-16 | CA1415 | 319(355) | 0(36) | 0(36) | 0(36) | 36 |
| 2019-10-17 | CA1415 | 347(355) | 0(8) | 1(8) | 0(7) | 7 |

表8. CA1415分离舱位(嵌套舱位)实际出行人数

| 日期 | 航班 | 经济全价Y | 基础折扣U | 优选折扣V | 特惠折扣W | 特价折扣T |
|------------|--------|----------|----------|---------|---------|-------|
| 2019-10-10 | CA1415 | 189(346) | 118(157) | 14(39) | 4(25) | 21 |
| 2019-10-11 | CA1415 | 166(313) | 88(147) | 45(59) | 4(14) | 10 |
| 2019-10-12 | CA1415 | 43(244) | 141(201) | 27(60) | 1(33) | 32 |
| 2019-10-13 | CA1415 | 59(347) | 123(288) | 22(165) | 51(143) | 92 |
| 2019-10-15 | CA1415 | 303(352) | 0(49) | 0(49) | 0(49) | 49 |
| 2019-10-16 | CA1415 | 319(355) | 0(36) | 0(36) | 0(36) | 36 |
| 2019-10-17 | CA1415 | 347(355) | 0(8) | 1(8) | 0(7) | 7 |

7 结论

本文针对无法精准预测价格-需求曲线以及旅客购票随机性，为航空公司座控构造一种简单的自适应随机逼近算法，采用舱位旅客成行历史数据来自动化地迭代确定航班舱位保护水平，从而使得航空公司收益水平最大化，克服了经典EMSR方法需要模型预测和优化先验知识的难题。从理论上证明该算法的均方收敛到实际真值，仿真验证表明该自

适应算法在实时预测和优化方面具有良好效果。

致谢

特别感谢中国科学院数学与系统科学研究院郭雷院士对本文算法给予悉心指导、鼓励以及要践行人民航空为人民的初心。

参考文献

- [1] Barnhart C, Belobaba PP, Odoni AR. Applications of operations research in the air transport industry[J]. Transportation Science, 2003, 37: 368-391.
- [2] McGill JI and van Ryzin GJ. Revenue management: Research overviews and prospects[J]. Transportation Science, 1999, 33: 233 - 256
- [3] Littlewood K. Forecasting and Control of Passenger Bookings, In: 12th AGIFORS Annual Symposium Proceedings[C], Nathanya (Israel), 1972, 95 - 117
- [4] Belobaba PP. Application of a probabilistic decision model to airline seat inventory control[J]. Operations Research, 1989, 37: 183-197
- [5] Curry RE. Optimal airline seat allocation with fare classes nested by origin and destinations[J]. Transportation Science, 1990, 24: 193-204
- [6] Brumelle SL, McGill JI, Ouin TH, et al. Allocation of airline seats between stochastically dependent demands[J]. Transp. Sci., 1990, 24:183-192
- [7] Wollmer RD. An airline seat management model for a single leg route when lower fare classes book first[J]. Operations Research, 1992, 40: 26 - 37
- [8] Belobaba PP. Optimal vs. Heuristic Methods for Nested Seat Allocation, In: Proceedings of the AGIFORS Reservations and Yield Management Study Group[C], Brussels, 1992
- [9] Belobaba PP, Weatherford LR. Comparing decision rules that incorporate customer diversion in perishable asset revenue management situations[J]. Decision Sciences, 1996, 27:343 - 363
- [10] Robbins H, Monro S. A stochastic approximation method[J]. Arm. Math. Statist, 1951, 22: 400-407
- [11] Kiefer J, Wolfowitz J. Stochastic estimation of the maximum of a regression function[J]. Ann. Math. Statist, 1952, 23:462 - 466
- [12] Chen HF, Zhu YM. Stochastic Approximation. Shanghai: Shanghai Scientific & Technical Publishers[B], 1996, 22 [陈瀚馥, 朱允民.随机逼近.上海:上海科学技术出版社, 1996,22]
- [13] Lai TL. Stochastic approximation[J]. Ann. Statist, 2003, 31: 391-406
- [14] Van Ryzin G, McGill J. Revenue Management Without Forecasting or Optimization: An Adaptive Algorithm for Determining Airline Seat Protection Levels[J]. Management Science, 2000, 46: 760-775
- [15] Brumelle SL, McGill JI. Airline seat allocation with multiple nested fare classes[J]. Oper. Res, 1993, 41: 127-137
- [16] Kunnuinkal S, Topaloglu H. Using stochastic approximation algorithms to compute optimal basestock levels in inventory control problems[J]. Oper. Res., 2008, 56: 646-664.
- [17] Guo L. Time-Varying Stochastic Systems: Stability and Adaptive Theory[B]. 2nd ed. Beijing: Science Press, 2022. 118 [郭雷.时变随机系统:稳定性与自适应理论.第二版.北京: 科学出版社,2022. 118]
- [18] Zhang LT, Guo L. Adaptive identification with guaranteed performance under saturated-observation and nonpersistent excitation[J]. 2022, ArXiv:2207.02422
- [19] Wang F, Zhang LT, Guo L. Applications of nonlinear recursive identification theory in sentencing data analyses[J]. Sci Sin Inform, 2022, 52:1837-1852 [王芳, 张蓝天, 郭雷.非线性递推辨识理论在量刑数据分析中的应用.中国科学:信息科学,2022, 52:1837-1852]
- [20] Sinha NK, Griscik MP. A stochastic approximation method[J]. IEEE Transactions on System, Man and Cybernetics, 1971, 1: 338-344

Copyright © 2025 by author(s) and Global Science Publishing Inc.

This work is licensed under the Creative Commons Attribution International License (CC BY 4.0).

<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>



Open Access